

## ПРИЛАДОБУДУВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 629.73

В.В. Бурнашев, О.В. Збруцький

### СИНТЕЗ ТРАЕКТОРІЇ ВИРІВНЮВАННЯ ЛІТАКА В РЕЖИМІ АВТОМАТИЧНОГО ПРИЗЕМЛЕННЯ

#### Вступ

Нині при дослідженні питань, пов'язаних із системами автоматичного приземлення, розглядаються, як правило, способи забезпечення якісного відпрацьовування заданих законів руху. При цьому мало уваги приділяється розробці самих законів. У літературі можна зустріти переважно лише якісні описи траєкторій посадки і найпростіших прикладів задання ліній вирівнювання [1–3]. Однак якість системи автоматичної посадки значною мірою визначається вибраним законом зміни заданої координати стану.

#### Постановка задачі

Розглянемо задачу вибору закону керування висотою при автоматичному приземленні. За відомим законом руху центра мас у вертикальній площині визначається закон відхилення руля висоти, який припускати мемо єдиним керуючим органом.

#### Математична модель поздовжнього руху літака

Для розв'язання поставленої задачі використовуватимемо модель поздовжнього руху літака у вигляді [4]

$$\begin{cases} \frac{d\Delta w}{ds} + C_X \Delta w + C_X^\alpha \Delta \alpha + C_Y \Delta \theta = \Delta r, \\ \frac{d\Delta \theta}{ds} + \frac{C_X'}{2} \Delta \theta - \frac{C_Y^\alpha}{2} \Delta \alpha - \frac{C_Y}{2} \Delta w = 0, \\ \frac{d^2 \Delta \vartheta}{ds^2} + \nu \frac{d\Delta \vartheta}{ds} + \lambda \frac{d\Delta \alpha}{ds} + \chi \Delta \alpha = \eta \Delta \delta_B, \\ \frac{dh}{ds} = \theta_0 + \Delta \theta, \quad \Delta \alpha = \Delta \vartheta - \Delta \theta. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $\Delta \alpha, \Delta \vartheta, \Delta \theta$  – відповідно відхилення кутів атаки, тангажу, нахилу траєкторії від їх програмних значень при плануванні по глісаді

$\alpha_0, \vartheta_0, \theta_0$ ;  $\Delta w = w - 1$  – відхилення квадрата безрозмірної швидкості  $w = (V/V_0)^2$  від програмного значення при плануванні;  $V$  – швидкість центра мас літака;  $V_0$  – швидкість центра мас літака при плануванні;  $h = H/(V_0 \tau_e)$  – безрозмірна висота літака;  $\tau_e = m/(\rho F V_0)$ ;  $m$  – маса літака;  $F$  – площа крила;  $\rho$  – густина повітря;  $s = l/(V_0 \tau_e)$  – безрозмірна довжина дуги траєкторії;  $l$  – довжина дуги траєкторії;  $\Delta \delta_B$  – відхилення руля висоти від його положення при плануванні по глісаді;  $\Delta r = r - r_0 = 2(R - R_0)/(\rho S V_0^2)$  – відносна зміна тяги двигунів;  $R$  – тяга двигунів;  $C_X, C_Y, C_X^\alpha, C_Y^\alpha, C_X', \lambda, \nu, \eta, \chi$  – аеродинамічні коефіцієнти літака при плануванні.

Закон руху центра мас літака на етапі приземлення має відповідати таким вимогам: 1) у момент дотику повинні набувати заданих значень вертикальна швидкість, кут тангажу, шляхова швидкість, місце точки дотику на смузі; 2) кут атаки, швидкість, відхилення органів керування при русі по вибраній лінії повинні мати допустимі межі; 3) траєкторія має бути гладкою, монотонною, плавно сполученою з глісадою.

Перераховані вимоги до лінії приземлення можна записати у вигляді рівнянь

$$h(0) = h_0, \quad \frac{dh}{ds}(0) = \theta_0, \quad h(s_d) = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \theta(s_d) = \Delta \theta_d, \quad \Delta \vartheta(s_d) = \Delta \vartheta_d, \quad \Delta w(s_d) = \Delta w_d;$$

і нерівностей

$$h(s) > 0, \quad \Delta \alpha(s) < \Delta \alpha_{\text{доп}}, \quad \Delta \delta_{\text{мін}} < \Delta \delta_B(s) < \Delta \delta_{\text{макс}}, \quad (3)$$

які мають виконуватись при  $0 < s < s_d$ , де  $s_d$  – точка дотику смуги;  $h_0$  – безрозмірна висота початку приземлення;  $\Delta w_d, \Delta \vartheta_d, \Delta \theta_d$  – значення відхилень відповідно безрозмірної швидкості, кутів тангажу й нахилу траєкторії від їх програмних значень при плануванні в точці дотику;  $\Delta \alpha_{\text{доп}}$  – гранично допустиме значення відхилення кута атаки від кута атаки при плануванні по глісаді;  $\Delta \delta_{\text{мін}}, \Delta \delta_{\text{макс}}$  – гранично можливі відхилення руля висоти від номінального значення при плануванні.

Для знаходження лівих частин рівнянь (2) розв'яжемо систему (1). Підставимо  $\Delta\alpha = \Delta\vartheta - \Delta\theta$  в рівняння (1) і перейдемо до зображень за Лапласом при початкових умовах  $\Delta\theta(0) = 0$ ,  $\Delta\vartheta(0) = 0$ ,  $\Delta w(0) = 0$ ,  $h(0) = h_0$ :

$$\begin{cases} (p + C_X)\Delta w(p) + (C_Y - C_X^\alpha)\Delta\theta(p) + C_X^\alpha\Delta\vartheta(p) = \Delta r(p), \\ -\frac{C_Y}{2}\Delta w(p) + \left(p + \frac{C_X'}{2} + \frac{C_Y^\alpha}{2}\right)\Delta\theta(p) - \frac{C_Y^\alpha}{2}\Delta\vartheta(p) = 0, \\ -(\lambda p + \chi)\Delta\theta(p) + (p^2 + (\nu + \lambda)p + \chi)\Delta\vartheta(p) = \eta\Delta\delta_b(p), \\ ph(p) - h_0 = \frac{\theta_0}{p} + \Delta\theta(p). \end{cases}$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta\theta(p) &= \frac{b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \Delta\delta_b(p), \\ \Delta\vartheta(p) &= \frac{d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \Delta\delta_b(p), \\ \Delta w(p) &= \frac{g_1 p + g_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \Delta\delta_b(p), \\ h(p) &= \frac{\theta_0}{p^2} + \frac{\Delta\theta(p)}{p} + \frac{h_0}{p}. \end{aligned} \quad (4)$$

В останніх формулах для простоти запису введені позначення:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\chi}{2}(C_X C_X' + C_Y^2), \\ a_1 &= \frac{1}{2}((\lambda + \nu)(C_X C_X' + C_Y^2) + \nu(C_X C_Y^\alpha - C_Y C_X^\alpha) + \\ &\quad + \chi(2C_X + C_X')), \\ a_2 &= \frac{C_X(C_X' + C_Y^\alpha + 2\lambda + 2\nu) + C_Y^2 - \\ &\quad - C_Y C_X^\alpha + \lambda C_X' + \nu(C_X' + C_Y^\alpha)}{2} + \chi, \\ a_3 &= C_X + \frac{C_X' + C_Y^\alpha}{2} + \lambda + \nu, \quad a_4 = 1; \\ b_0 &= \frac{C_X C_Y^\alpha - C_Y C_X^\alpha}{2} \eta, \quad b_1 = \frac{\eta C_Y^\alpha}{2}, \\ d_0 &= \frac{C_X C_X' + C_Y^2 + C_X C_Y^\alpha - C_Y C_X^\alpha}{2} \eta, \end{aligned}$$

$$d_1 = \eta \left( C_X + \frac{C_X' + C_Y^\alpha}{2} \right), \quad d_2 = \eta;$$

$$g_0 = -\frac{1}{2} \eta (C_Y C_Y^\alpha + C_X' C_X^\alpha), \quad g_1 = -\eta C_X^\alpha.$$

З формул (4) можна знайти зображення величин, необхідних для визначення лівих частин рівнянь (2) і нерівностей (3):

$$\begin{aligned} \Delta\delta_b(p) &= \frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_1 p + b_0} \times \\ &\quad \times \left( ph_3(p) - h_0 - \frac{\theta_0}{p} \right), \\ \Delta\theta(p) &= ph_3(p) - h_0 - \frac{\theta_0}{p}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta\vartheta(p) = \frac{d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{b_1 p + b_0} \left( ph_3(p) - h_0 - \frac{\theta_0}{p} \right),$$

$$\Delta w(p) = \frac{g_1 p + g_0}{b_1 p + b_0} \left( ph_3(p) - h_0 - \frac{\theta_0}{p} \right).$$

### Вид закону руху центра мас

Вираз для безрозмірної висоти  $h_3(s)$  доцільно шукати як функцію, що містить стільки варіюємих величин, скільки параметрів необхідно забезпечити бажаними значеннями в точці дотику і початковій точці. Крім того, для забезпечення виконання обмежень на траєкторії треба мати ще хоча б один варіюваний параметр.

Закон  $h_3(s)$  слід шукати у вигляді лінійної комбінації деяких відомих функцій змінної  $s$ . При цьому як варіювані параметри можна вибрати коефіцієнти лінійної комбінації. У цьому випадку рівняння (2) будуть лінійними відносно шуканих параметрів.

Однак лише задоволення зазначеного вище правила при виборі вигляду шуканого закону не досить для розв'язання поставленої задачі. Для того щоб існували оригінали зображень величин (4), необхідно, щоб самі зображення були правильними дрібно-раціональними функціями  $p$ . У цьому сенсі найбільш критичним виразом є відхилення руля висоти. Множина функцій  $h_3(s)$ , що забезпечує існування оригіналу для руля висоти, забезпечує існування оригіналів й інших параметрів поздовжнього

руху літака (5), оскільки дріб у виразі  $\Delta\delta_v(p)$  має найбільший степінь чисельника.

Тому для опису множини способів вибору виду шуканого закону розглянемо вираз для зображення відхилення руля висоти. Можна показати, що закон для зміни відносної висоти  $h_3(s)$  доцільно шукати в такому вигляді, щоб вираз у дужках в (5) був дробово-раціональною функцією  $p$  з різницею степенів знаменника й чисельника не менше чотирьох. У виразі в дужці є доданок  $-h_0 - \frac{\theta_0}{p}$ , що при перемноженні

на  $\frac{a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_1p + b_0}$  дає неправиль-

ний дріб. Тому  $h_3(s)$  має містити відповідний доданок  $h_0 + \theta_0s$ . Інші доданки необхідно вибрати так, щоб різниця степенів знаменника й чисельника зображення кожного з них була не менше п'яти. При цьому бажано, щоб відразу виконувалися перша й друга умови (2), тому що це скорочує число шуканих параметрів.

У такій постановці для розв'язання поставленої задачі закон руху центра мас літака доцільно шукати у вигляді однієї з таких форм:

$$h_{31}(s) = h_0 + \theta_0s + A_4s^4 + A_5s^5 + \dots + A_n s^n,$$

$$h_{32}(s) = h_0 + \theta_0s + A_1s^4e^{-s} + A_2s^4e^{-2s} + A_3s^4e^{-3s} + \dots + A_n s^4e^{-ns} \quad (6)$$

або

$$h_{33}(s) = h_0 + \theta_0s + A_1s^4e^{-s} + A_2s^4e^{-2s} + A_3s^4e^{-3s} + A_4s^4 + A_5s^5 + \dots + A_n s^4e^{-ns} + A_m s^m.$$

### Розрахунок траєкторії вирівнювання

Розглянемо синтез закону зміни висоти у вигляді параболічної функції  $h_{31}(s)$  (6).

Відповідно до рівнянь (2), парабола повинна мати сім членів. Однак перше й друге рівняння виконуються тотожно, тому необхідно мати п'ять варійованих параметрів. Тоді

$$h_3(s) = h_0 + \theta_0s + A_4s^4 + A_5s^5 + A_6s^6 + A_7s^7 + A_8s^8 \quad (7)$$

і зображення Лапласа матиме вигляд

$$h_3(p) = \frac{h_0}{p} + \frac{\theta_0}{p^2} + \frac{24A_4}{p^5} + \frac{120A_5}{p^6} + \frac{720A_6}{p^7} + \frac{5040A_7}{p^8} + \frac{40320A_8}{p^9}. \quad (7a)$$

Підставляючи у формули (5) зображення шуканого закону (7a), одержуємо залежність зображення

$$\Delta\theta(p) = ph(p) - h_0 - \frac{\theta_0}{p} = \frac{24A_4}{p^4} + \frac{120A_5}{p^5} + \frac{720A_6}{p^6} + \frac{5040A_7}{p^7} + \frac{40320A_8}{p^8} \quad (8)$$

і оригіналу відхилення кута нахилу траєкторії

$$\Delta\theta(s) = 4A_4s^3 + 5A_5s^4 + 6A_6s^5 + 7A_7s^6 + 8A_8s^7 \quad (8a)$$

від шуканих коефіцієнтів  $A_i$ . Аналогічно одержуємо зображення відхилення руля висоти

$$\Delta\delta_v(p) = \frac{a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_1p + b_0} \times \left( \frac{24A_4}{p^4} + \frac{120A_5}{p^5} + \frac{720A_6}{p^6} + \frac{5040A_7}{p^7} + \frac{40320A_8}{p^8} \right). \quad (9)$$

Оригінал зображення першого доданка в (9) легко знайти, розклавши дріб на простіші:

$$\frac{a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_1p + b_0} \frac{1}{p^4} = \frac{c_1}{b_1p + b_0} + \frac{c_2}{p} + \frac{c_3}{p^2} + \frac{c_4}{p^3} + \frac{c_5}{p^4} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{c_1}{b_1} e^{-\frac{b_0}{b_1}s} + \frac{c_5}{6} s^3 + \frac{c_4}{2} s^2 + c_3s + c_2,$$

$$\text{де } c_1 = a_4 - \frac{a_3b_1}{b_0} + \frac{a_2b_1^2}{b_0^2} - \frac{a_1b_1^3}{b_0^3} + \frac{a_0b_1^4}{b_0^4}; c_2 = \frac{a_3}{b_0} - \frac{a_2b_1}{b_0^2} + \frac{a_1b_1^2}{b_0^3} - \frac{a_0b_1^3}{b_0^4}; c_3 = \frac{a_2}{b_0} - \frac{a_1b_1}{b_0^2} + \frac{a_0b_1^2}{b_0^3}; c_4 = \frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0b_1}{b_0^2}; c_5 = \frac{a_0}{b_0}.$$

Оригінали наступних доданків зручно шукати згідно з теоремою Бореля [5], визначаючи згортки знайденого оригіналу попереднього доданка і  $1/p$ :

$$\begin{aligned} & \frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_1 p + b_0} \frac{1}{p^4} \frac{1}{p} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{c_1}{b_0} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_5}{24} s^4 + \frac{c_4}{6} s^3 + \frac{c_3}{2} s^2 + c_2 s + \frac{c_1}{b_0}, \\ & \frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_1 p + b_0} \frac{1}{p^5} \frac{1}{p} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{c_1 b_1}{b_0^2} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_5}{120} s^5 + \frac{c_4}{24} s^4 + \frac{c_3}{6} s^3 + \\ & \quad + \frac{c_2}{2} s^2 + \frac{c_1}{b_0} s - \frac{c_1 b_1}{b_0^2}, \\ & \frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{(b_1 p + b_0) p^6} \xrightarrow{L^{-1}} -\frac{c_1 b_1^2}{b_0^3} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_5}{720} s^6 + \frac{c_4}{120} s^5 + \frac{c_3}{24} s^4 + \\ & \quad + \frac{c_2}{6} s^3 + \frac{c_1}{2 b_0} s^2 - \frac{c_1 b_1}{b_0^2} s + \frac{c_1 b_1^2}{b_0^3}, \\ & \frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{(b_1 p + b_0) p^7} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{c_1 b_1^3}{b_0^4} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_5}{5040} s^7 + \frac{c_4}{720} s^6 + \frac{c_3}{120} s^5 + \\ & \quad + \frac{c_2}{24} s^4 + \frac{c_1}{6 b_0} s^3 - \frac{c_1 b_1}{2 b_0^2} s^2 + \frac{c_1 b_1^2}{b_0^3} s - \frac{c_1 b_1^3}{b_0^4}. \end{aligned}$$

Закон зміни відхилення руля висоти набуває вигляду

$$\begin{aligned} \Delta \delta_B(s) = & 24 A_4 \times \\ & \times \left( \frac{c_1}{b_1} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_5}{6} s^3 + \frac{c_4}{2} s^2 + c_3 s + c_2 \right) + 120 A_5 \times \\ & \times \left( -\frac{c_1}{b_0} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_5}{24} s^4 + \frac{c_4}{6} s^3 + \frac{c_3}{2} s^2 + c_2 s + \frac{c_1}{b_0} \right) + \\ & + 720 A_6 \left( \frac{c_1 b_1}{b_0^2} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_5}{120} s^5 + \frac{c_4}{24} s^4 + \frac{c_3}{6} s^3 + \right. \\ & \left. + \frac{c_2}{2} s^2 + \frac{c_1}{b_0} s - \frac{c_1 b_1}{b_0^2} \right) + 5040 A_7 \left( -\frac{c_1 b_1^2}{b_0^3} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{c_5}{720} s^6 + \frac{c_4}{120} s^5 + \frac{c_3}{24} s^4 + \frac{c_2}{6} s^3 + \frac{c_1}{2 b_0} s^2 - \right. \\ & \left. - \frac{c_1 b_1}{b_0^2} s + \frac{c_1 b_1^2}{b_0^3} \right) + 40320 A_8 \left( \frac{c_1 b_1^3}{b_0^4} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \right. \\ & \left. + \frac{c_5}{5040} s^7 + \frac{c_4}{720} s^6 + \frac{c_3}{120} s^5 + \frac{c_2}{24} s^4 + \right. \\ & \left. + \frac{c_1}{6 b_0} s^3 - \frac{c_1 b_1}{2 b_0^2} s^2 + \frac{c_1 b_1^2}{b_0^3} s - \frac{c_1 b_1^3}{b_0^4} \right) = \sum_{i=4}^8 A_i D_i(s). \quad (10) \end{aligned}$$

Згідно з (6) і (9) зображення відхилення кута тангажу визначається за формулою

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta(p) = & \frac{d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{b_1 p + b_0} \times \\ & \times \left( \frac{24 A_4}{p^4} + \frac{120 A_5}{p^5} + \frac{720 A_6}{p^6} + \frac{5040 A_7}{p^7} + \frac{40320 A_8}{p^8} \right). \end{aligned}$$

Аналогічно (10) знайдемо закон зміни кута тангажу

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta(s) = & 24 A_4 \times \\ & \times \left( \frac{c_6}{b_1} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{10}}{6} s^3 + \frac{c_9}{2} s^2 + c_8 s + c_7 \right) + 120 A_5 \times \\ & \times \left( -\frac{c_6}{b_0} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{10}}{24} s^4 + \frac{c_9}{6} s^3 + \frac{c_8}{2} s^2 + c_7 s + \frac{c_6}{b_0} \right) + \\ & + 720 A_6 \left( \frac{c_6 b_1}{b_0^2} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{10}}{120} s^5 + \frac{c_9}{24} s^4 + \frac{c_8}{6} s^3 + \right. \\ & \left. + \frac{c_7}{2} s^2 + \frac{c_6}{b_0} s - \frac{c_6 b_1}{b_0^2} \right) + 5040 A_7 \left( -\frac{c_6 b_1^2}{b_0^3} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \right. \\ & \left. + \frac{c_{10}}{720} s^6 + \frac{c_9}{120} s^5 + \frac{c_8}{24} s^4 + \frac{c_7}{6} s^3 + \frac{c_6}{2 b_0} s^2 - \right. \\ & \left. - \frac{c_6 b_1}{b_0^2} s + \frac{c_6 b_1^2}{b_0^3} \right) + 40320 A_8 \left( \frac{c_6 b_1^3}{b_0^4} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \right. \\ & \left. + \frac{c_{10}}{5040} s^7 + \frac{c_9}{720} s^6 + \frac{c_8}{120} s^5 + \frac{c_7}{24} s^4 + \frac{c_6}{6 b_0} s^3 - \right. \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{c_6 b_1}{2b_0^2} s^2 + \frac{c_6 b_1^2}{b_0^3} s - \frac{c_6 b_1^3}{b_0^4} \right) = \sum_{i=4}^8 A_i B_i(s). \quad (11)$$

Після підстановки (9) в (6) одержимо зображення для відхилення відносної швидкості

$$\Delta w(p) = \frac{g_1 p + g_0}{b_1 p + b_0} \times \left( \frac{24A_4}{p^4} + \frac{120A_5}{p^5} + \frac{720A_6}{p^6} + \frac{5040A_7}{p^7} + \frac{40320A_8}{p^8} \right),$$

оригінал якої має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta w(s) = & 24A_4 \left( \frac{c_{11}}{b_1} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{15}}{6} s^3 + \frac{c_{14}}{2} s^2 + c_{13} s + \right. \\ & \left. + c_{12} \right) + 120A_5 \left( -\frac{c_{11}}{b_0} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{15}}{24} s^4 + \frac{c_{14}}{6} s^3 + \right. \\ & \left. + \frac{c_{13}}{2} s^2 + c_{12} s + \frac{c_{11}}{b_0} \right) + 720A_6 \left( \frac{c_{11} b_1}{b_0^2} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \right. \\ & \left. + \frac{c_{15}}{120} s^5 + \frac{c_{14}}{24} s^4 + \frac{c_{13}}{6} s^3 + \frac{c_{12}}{2} s^2 + \frac{c_{11}}{b_0} s - \right. \\ & \left. - \frac{c_{11} b_1}{b_0^2} \right) + 5040A_7 \left( -\frac{c_{11} b_1^2}{b_0^3} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{15}}{720} s^6 + \right. \\ & \left. + \frac{c_{14}}{120} s^5 + \frac{c_{13}}{24} s^4 + \frac{c_{12}}{6} s^3 + \frac{c_{11}}{2b_0} s^2 - \frac{c_{11} b_1}{b_0^2} s + \right. \\ & \left. + \frac{c_{11} b_1^2}{b_0^3} \right) + 40320A_8 \left( \frac{c_{11} b_1^3}{b_0^4} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{15}}{5040} s^7 + \right. \\ & \left. + \frac{c_{14}}{720} s^6 + \frac{c_{13}}{120} s^5 + \frac{c_{12}}{24} s^4 + \frac{c_{11}}{6b_0} s^3 - \right. \\ & \left. - \frac{c_{11} b_1}{2b_0^2} s^2 + \frac{c_{11} b_1^2}{b_0^3} s - \frac{c_{11} b_1^3}{b_0^4} \right) = \sum_{i=4}^8 A_i E_i(s). \quad (12) \end{aligned}$$

У виразах (10)–(12) позначено:

$$D_4(s) = 24 \left( \frac{c_1}{b_1} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_5}{6} s^3 + \frac{c_4}{2} s^2 + c_3 s + c_2 \right),$$

$$D_5(s) = 120 \left( -\frac{c_1}{b_0} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_5}{24} s^4 + \frac{c_4}{6} s^3 + \frac{c_3}{2} s^2 + c_2 s + \frac{c_1}{b_0} \right),$$

$$B_4(s) = 24 \left( \frac{c_6}{b_1} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{10}}{6} s^3 + \frac{c_9}{2} s^2 + c_8 s + c_7 \right),$$

$$B_5(s) = 120 \left( -\frac{c_6}{b_0} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{10}}{24} s^4 + \frac{c_9}{6} s^3 + \frac{c_8}{2} s^2 + c_7 s + \frac{c_6}{b_0} \right),$$

$$E_4(s) = 24 \left( \frac{c_{11}}{b_1} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{15}}{6} s^3 + \frac{c_{14}}{2} s^2 + c_{13} s + c_{12} \right),$$

$$E_5(s) = 120 \times \left( -\frac{c_{11}}{b_0} e^{-\frac{b_0 s}{b_1}} + \frac{c_{15}}{24} s^4 + \frac{c_{14}}{6} s^3 + \frac{c_{13}}{2} s^2 + c_{12} s + \frac{c_{11}}{b_0} \right).$$

В результаті підстановки (7), (8a), (11), (12) в (2) із врахуванням введених позначень отримуємо систему чотирьох лінійних алгебричних рівнянь відносно п'яти невідомих коефіцієнтів  $A_i$ :

$$\begin{cases} s_d^4 A_4 + s_d^5 A_5 + s_d^6 A_6 + s_d^7 A_7 = \\ = -h_0 - \theta_0 s_d - s_d^8 A_8, \\ B_4(s_d) A_4 + B_5(s_d) A_5 + B_6(s_d) A_6 + B_7(s_d) A_7 = \\ = \Delta \vartheta_d - B_8(s_d) A_8, \\ E_4(s_d) A_4 + E_5(s_d) A_5 + E_6(s_d) A_6 + E_7(s_d) A_7 = \\ = \Delta w_d - E_8(s_d) A_8, \\ 4s_d^3 A_4 + 5s_d^4 A_5 + 6s_d^5 A_6 + 7s_d^6 A_7 = \\ = \Delta \theta_d - 8s_d^7 A_8. \end{cases} \quad (13)$$

Розв'язуючи систему (13) відносно  $A_4, A_5, A_6, A_7$ , знаходимо  $A_4(A_8), A_5(A_8), A_6(A_8), A_7(A_8)$ . Після підстановки в нерівності (3) виразів (7), (10), геометричного співвідношення  $\Delta \alpha = \Delta \vartheta - \Delta \theta$  й знайдених  $A_4(A_8), A_5(A_8), A_6(A_8), A_7(A_8)$  одержуємо систему

$$\begin{cases} h(s, A_8) > 0, \\ \Delta\alpha(s, A_8) < \Delta\alpha_{\text{доп}}, \\ \Delta\delta_{\text{min}} < \Delta\delta_B(s, A_8) < \Delta\delta_{\text{max}}. \end{cases} \quad (14)$$

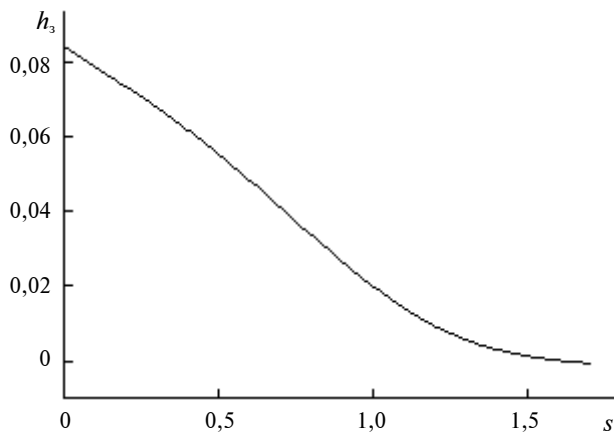


Рис. 1. Зміна висоти при приземленні

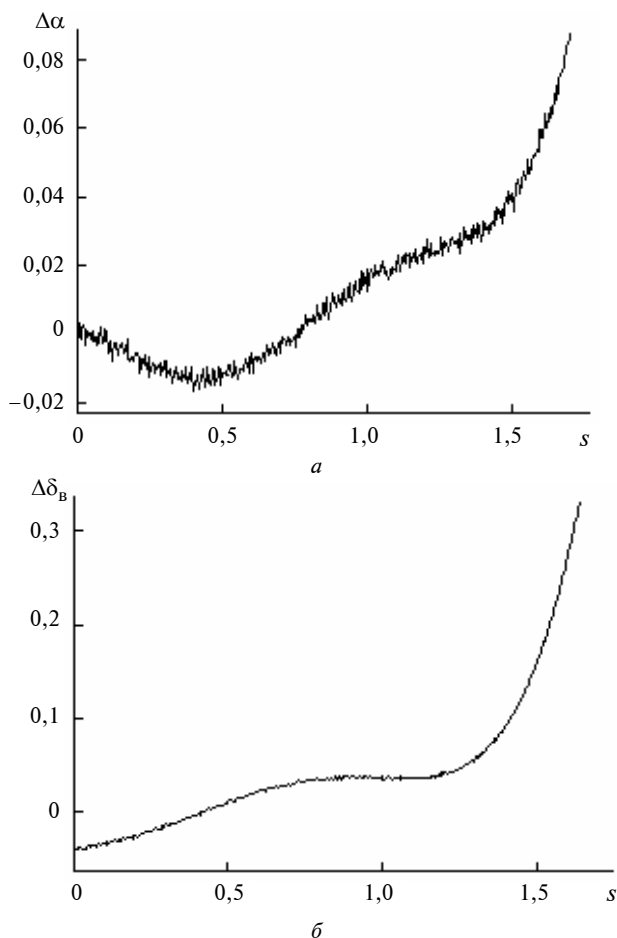


Рис. 2. Відхилення кута атаки (а) і руля висоти (б) від номінальних значень при плануванні для літака ІЛ-18

Коефіцієнт  $A_8$  повинен вибиратися таким, щоб при  $0 < s < s_d$  виконувалися всі чотири нерівності (14). Вибір  $A_8$  зручно зробити графічно, побудувавши  $h(s, A_8)$ ,  $\Delta\alpha(s, A_8)$ ,  $\Delta\delta_B(s, A_8)$ . Після визначення  $A_8$  можна обчислити  $A_4$ ,  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $A_7$ . Це означає, що шуканий вираз для безрозмірної висоти  $h_3(s)$  знайдено.

Описана задача чисельно розв'язана для літака ІЛ-18, траєкторія якого показана на рис. 1, 2. Для висоти початку вирівнювання 25 метрів довжина повітряної ділянки становила 477 м при вертикальній швидкості в точці дотику 0,6 м/с.

Задавати програму зміни висоти згідно з формулами (6) доцільно, якщо є можливість досить точно контролювати величину  $s$ . В протилежному випадку закон можна задавати як функцію часу. Тоді необхідно розрахувати приблизний час дотику ЗПС. При цьому правила знаходження закону залишаються такими ж.

### Висновки

Запропонований підхід до розв'язання задачі задання програмного руху при автоматичному вирівнюванні літака дає можливість одержати закон зміни висоти або іншої координати стану, що забезпечує бажані значення параметрів польоту в точці дотику при виконанні обмежень протягом даного етапу посадки.

Кількість варійованих параметрів шуканої функції закону зміни висоти слід вибирати, виходячи з числа величин, які необхідно забезпечити заданими в точці дотику й початкової точці вирівнювання, а також із наявності обмежень на параметри руху. Задання закону у вигляді лінійної комбінації деяких функцій із шуканими коефіцієнтами приводить до розв'язання системи лінійних рівнянь відносно цих коефіцієнтів. При цьому має виконуватись умова існування функції кута відхилення руля висоти.

Числовий розрахунок варіанта траєкторії за запропонованим алгоритмом показав дієвість розглянутого підходу.

В.В. Бурнашев, А.В. Збруцкий

СИНТЕЗ ТРАЕКТОРИИ ВЫРАВНИВАНИЯ САМОЛЕТА В РЕЖИМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПРИЗЕМЛЕНИЯ

Описан подход к решению задачи задания программного движения при автоматическом выравнивании самолета. Рассмотрены основные требования к программе продольного движения самолета на этапе приземления. Предложены рекомендации для задания вида закона изменения высоты. Показан алгоритм расчета одного из предложенных, в соответствии с рекомендациями, возможных вариантов траектории. Синтез такого закона проведен для конкретного самолета, выполнено компьютерное моделирование движения по вычисленной траектории.

V.V. Burnashev, A.V. Zbrutskiy

THE ALIGNMENT TRAJECTORY SYNTHESIS OF THE PLANE IN AN AUTOMATIC LANDING MODE

This paper outlines the approach to resolve the program motion task at the airplane automatic alignment. In particular, we consider the basic requirements for the longitudinal motion program of the airplane in the landing stage. We also provide some recommendations for the law assignment of the height change and implement the calculation algorithm of the possible trajectory variant. On the experimental side, synthesis of such law is carried out for the specific airplane and computer modeling of the motion on the calculated trajectory is executed.

1. Антонов М.О., Афанасьева К.Е., Коблов А.И., Ширяев В.И. Алгоритмы оценивания и управления беспилотным летательным аппаратом на этапе посадки // Изв. РАН. ТиСУ. – 2005. – № 2. – С. 166–173.
2. Ким Н.В., Степанова Н.В. Определение углов крена и тангажа беспилотного летательного аппарата на основе обработки и анализа последовательности изображений подстилающей поверхности // Авиакосмическое приборостроение. – 2006. – № 8. – С. 18–23.
3. Добровольский Д.В. Методика управления динамической системой “летчик–самолет” с использованием звуковых сигналов: Дис. ... канд. техн. наук; 05.07.09. – К., 2005. – 139 с.
4. Поселов Г.С. Динамика автоматического управления самолетом при посадке // Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – 1959. – Вып. 714.
5. Диткин В.А., Кузнецов П.И. Справочник по операционному исчислению. Основы теории и таблицы формул. – Л.: Техничко-теоретическая литература, 1951. – 256 с.

Рекомендована Радою  
НАЦ критичних технологій  
навігаційного приладобудування  
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції  
27 грудня 2007 року