

УДК 531.768

М.Г. Черняк

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МЕТОДИЧНИХ ВІБРАЦІЙНИХ ПОХИБОК МАЯТНИКОВОГО КОМПЕНСАЦІЙНОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА З ПРУЖНИМ ПІДВІСОМ ЧУТЛИВОГО ЕЛЕМЕНТА

Вступ

Прецизійні маятникові компенсаційні акселерометри (МКА) є датчиками первинної інформації практично всіх сучасних інерціальних навігаційних систем (ІНС) рухомих об'єктів. Вони здійснюють вимірювання проекції на свою вимірювальну вісь (ВВ) уявного лінійного прискорення руху основи і перетворення її у вихідний електричний сигнал. Відомо, що похибки МКА значною мірою визначають точність розв'язання навігаційної задачі в ІНС [1].

У реальних умовах експлуатації вібраційні збурення (ВЗ) і кутові коливання (КК) основи значно погіршують точність МКА, спричиняючи виникнення їх систематичних вібраційних похибок (ВП) [2]. У працях [3, 4] найповніше розглянуто математичні моделі (ММ) методичних ВП МКА з пружним підвісом (ПП) чутливого елемента (ЧЕ). Однак ці моделі побудовані лише в умовах дії на МКА детермінованих поступових синхронних вібрацій, що обмежує їх відповідність реальним умовам експлуатації МКА.

Постановка задачі

Метою статті є розробка математичної моделі методичних ВП МКА з ПП в найбільш загальних умовах просторового коливального руху основи з довільним сполученням частот та початкових фаз детермінованих ВЗ і КК. Задачу розв'язуємо в аналітичному вигляді методом послідовних наближень, використовуючи рівняння ідеальної (без врахування інструментальних похибок) роботи МКА.

Вихідні положення

Сучасні МКА з ПП найчастіше будуються за компенсаційною функціональною схемою, яку наведено на рисунку.

В прямому ланцюгу схеми розміщено маятниковий ЧЕ, датчик переміщення (ДП) ЧЕ по інформативних відносних узагальнених координатах та підсилювально-коректуючу ланку (ПКЛ), а в ланцюгу від'ємного зворотного зв'язку (ВЗЗ) – зворотний компенсуючий перетворювач (ЗКП) магнітоелектричного принципу дії [1]. Чутливий елемент містить інерційну масу l , яка з'єднана з основою 2 акселерометра за допомогою балочного ПП 3. Вісь x_3^0 є вимірювальною віссю акселерометра.

Розглянемо рух ЧЕ по інформативних відносних узагальнених координатах α і x , які відповідають напрямам мінімальної жорсткості ПП та максимальної чутливості ДП. Для цього запишемо систему лінеаризованих рівнянь ідеальної роботи МКА в умовах просторового руху основи, яка складається з рівнянь руху ЧЕ по координатах α і x у зв'язаній з основою системі координат x_i^0 ($i = 1, 3$):

$$\begin{aligned} J_{22}\ddot{\alpha} + b_{\alpha}\dot{\alpha} + c_{\alpha}\alpha + ml_c\ddot{x} - c_{23}x = ml_c(w_3 + w_1\alpha) - \\ - ml_c(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)x - J_{22}\dot{\Omega}_2 + (J_{33} - J_{11})(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)\alpha + \\ + (J_{33} - J_{11})\Omega_1\Omega_3 + M_{3КП}, \end{aligned} \quad (1)$$

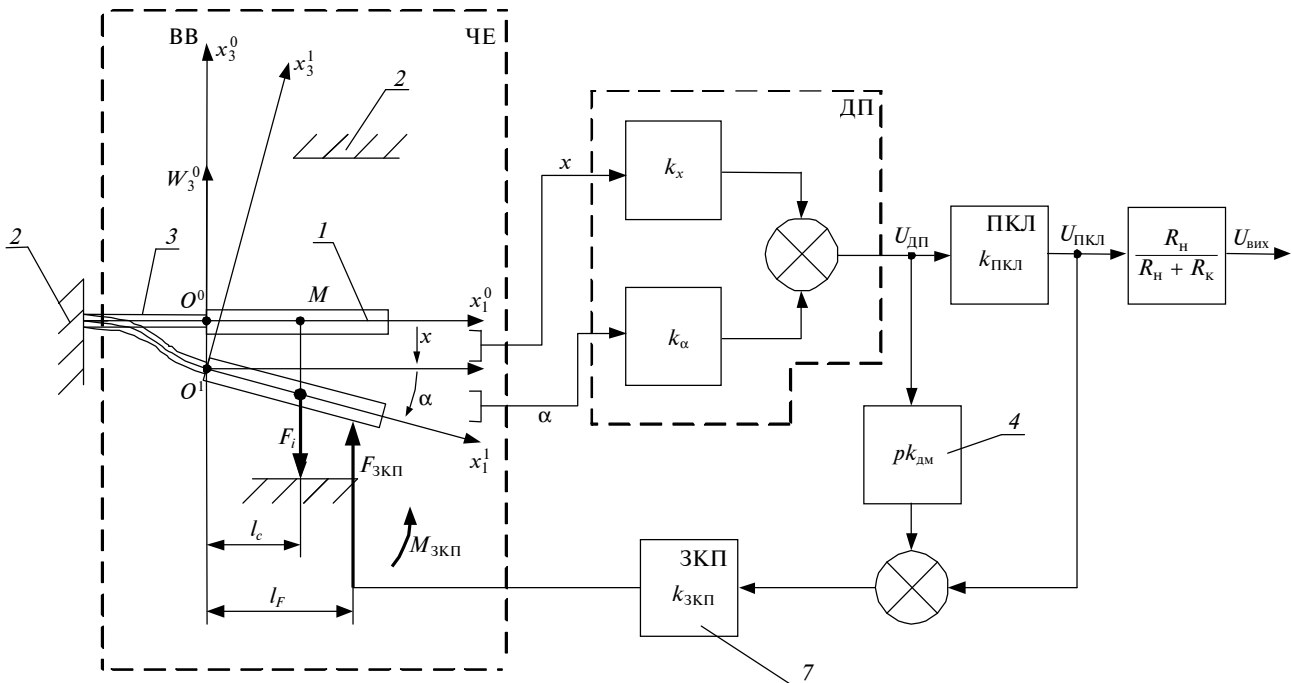
$$m\ddot{x} + b_3\dot{x} + c_3x + ml_c\ddot{\alpha} - c_{23}\alpha = mw_3 +$$

$$+ m(x + l_c\alpha)(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - ml_c(\dot{\Omega}_2 - \Omega_1\Omega_3) + F_{3КП},$$

та рівнянь, які описують (з врахуванням електричного демпфірування) роботу контуру ВЗЗ в смугі пропускання МКА:

$$\begin{aligned} F_{3КП} = -k_{3КП}[k_{ПКЛ}(k_{\alpha}\alpha + k_x x) + k_{дм}(k_{\alpha}\dot{\alpha} + \\ + k_x\dot{x})], \quad M_{3КП} = F_{3КП}l_F, \quad l_F \approx l_c, \end{aligned} \quad (2)$$

де m , l_c , J_{ii} , $i = \overline{1, 3}$, – маса ЧЕ, його координата центра мас по осі x_1^1 та моменти інерції в системі координат x_i^1 ; b_{α} , b_3 – коефіцієнти кутового та лінійного демпфірування коливань ЧЕ; c_{α} , c_3 , c_{23} – кутова, лінійна та перехресна жорсткості ПП; $F_{3КП}$, $M_{3КП}$ – сила та момент, що створює ЗКП; k_{α} , $k_{ПКЛ}$, $k_{3КП}$, $k_{дм}$ – відповідно коефіцієнти передачі ДП (по відповідних інформативних переміщеннях ЧЕ), ПКЛ, ЗКП та контуру електричного демпфірування; l_F – координата прикладання сили $F_{3КП}$ до ЧЕ з боку ЗКП; w_i , Ω_i , $i = \overline{1, 3}$, – переносні лінійні прискорення та кутові швидкості руху основи, задані в системі координат x_i^0 . Лінійне прискорення w_3 вимірюється акселерометром, решта прискорень, кутові швидкості та їх похідні (кутові прискорення) є джерелом його вібраційних похибок.



Функціональна схема МКА: 1 – інерційна маса; 2 – основа акселерометра; 3 – пружний підвіс ІМ; 4 – ланка електричного демпфування коливань ІМ

Ввівши позначення $k_{ЗКП}k_{ПКЛ} = k$, $k_{ЗКП}k_{дм} = k_d$, $c_\alpha + l_c k k_\alpha = G$, $-c_{23} + l_c k k_x = C_x$, $-c_{23} + k k_\alpha = C_\alpha$, $c_3 + k k_x = C$, $b_\alpha + l_c k_d k_\alpha = D$, $k_d k_\alpha = B_\alpha$, $l_c k_d k_x = B_x$, $b_3 + k_d k_x = B$ та виконавши підстановку (2) в (1), систему лінеаризованих рівнянь ідеальної роботи МКА запишемо в зручному для дослідження матричному операторному вигляді

$$A(p)[\alpha, x]^T = \tilde{F}_1(t) + \varepsilon \tilde{F}_2(t), \quad (3)$$

де $p = \frac{d}{dt}$ – оператор диференціювання; $A_{11}(p) = J_{22}p^2 + Dp + G$; $A_{12}(p) = ml_c p^2 + B_x p + C_x$; $A_{21}(p) = ml_c p^2 + B_\alpha p + C_\alpha$; $A_{22}(p) = mp^2 + Bp + C$; $\tilde{F}_1(t)$ – адитивні збудження, які залежать від кінематичних параметрів руху основи, але не залежать від узагальнених координат:

$$\tilde{F}_1(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ F_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml_c w_3 - J_{22}\dot{\Omega} + (J_{33} - J_{11})\Omega_1\Omega_3 \\ mw_3 - ml_c\dot{\Omega}_2 + ml_c\Omega_1\Omega_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$\tilde{F}_2(t)$ – мультиплікативні збудження, які залежать від кінематичних параметрів руху основи та лінійно помножені на α і x :

$$\tilde{F}_2(t) = \begin{bmatrix} M_2(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ml_c w_1 + (J_{33} - J_{11})(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ ml_c(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ x \end{bmatrix}. \quad (5)$$

У системі (3) цим збудженням приписаний малий параметр ε в припущенні, що вони завдяки малості переміщень α і x чутливого елемента компенсаційного акселерометра мають вищий порядок малості, ніж $\tilde{F}_1(t)$.

Задамо параметри детермінованих ВЗ і КК ξ_l ($l = \overline{1, 6}$), які входять до виразів (4) і (5) та діють на МКА з боку основи. При цьому запишемо їх у зручному для подальшого розв'язання задачі комплексному вигляді:

$$w_i = a_i \cos(n_i t + \gamma_i) = a_{i*} e^{jn_i t} + \bar{a}_{i*} e^{-jn_i t}, \quad \gamma_3 = 0,$$

$$\Omega_i = b_i \cos(\omega_i t + \delta_i) = b_{i*} e^{j\omega_i t} + \bar{b}_{i*} e^{-j\omega_i t}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

де a_i , b_i , n_i , ω_i , γ_i , δ_i – амплітуди, частоти та початкові фази ВЗ і КК; $a_{i*} = 0,5a_i e^{-j\gamma_i}$, $b_{i*} = 0,5 \times b_i e^{-j\delta_i}$ – відповідні комплексні амплітуди. Тут

і далі рисочкою зверху або аббревіатурою КС позначається комплексно-сполучена величина.

Задачу створення математичної моделі ВП МКА уточнимо таким чином. Необхідно знайти вирази, які описують систематичні (усереднені за часом) зміщення “нуля” вихідного сигналу МКА при дії на нього (сумісному чи окремому) ВЗ і КК вигляду (6). Треба також визначити умови (співвідношення частот та початкових фаз ВЗ і КК), при яких ці зміщення виникають та при яких вони набувають максимальних значень.

Загальний розв’язок задачі

Розв’яжемо поставлену задачу методом послідових наближень [5]. При цьому попередньо, не задаючись конкретним виглядом $M(t)$ і $F(t)$, знайдемо частинний розв’язок системи (3)

$$[\alpha, x]^T = W(p)[M(t), F(t)]^T, \quad (7)$$

де $W(p) = A^{-1}(p)$ – передавальна матриця системи, елементи якої при $p = j\omega$ є частотними передавальними функціями (ПФ) ЧЕ, що визначаються з таких виразів:

$$W_{11}(\omega) = (C - \omega^2 m + j\omega B)\Delta^{-1}(\omega),$$

$$W_{12}(\omega) = -(C_x - \omega^2 ml_c + j\omega B_x)\Delta^{-1}(\omega), \quad (8)$$

$$W_{21}(\omega) = -(C_\alpha - \omega^2 ml_c + j\omega B_\alpha)\Delta^{-1}(\omega),$$

$$W_{22}(\omega) = (G - \omega^2 J_{22} + j\omega D)\Delta^{-1}(\omega),$$

де

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) = & (G - \omega^2 J_{22})(C - \omega^2 m) - (C_\alpha - \omega^2 ml_c)(C_x - \\ & - \omega^2 ml_c) + j\omega[(C - \omega^2 m)D + (G - \omega^2 J_{22})B - \\ & - (C_x - \omega^2 ml_c)B_\alpha - (C_\alpha - \omega^2 ml_c)B_x]. \end{aligned}$$

Для сталих складових правих частин системи рівнянь (3) $\langle M(t) \rangle = \langle M \rangle$, $\langle F(t) \rangle = \langle F \rangle$ запишемо шукані “відходи” маятникового ЧЕ МКА

$$\langle \alpha \rangle, \langle x \rangle^T = W(0)[\langle M \rangle, \langle F \rangle]^T, \quad (9)$$

де $\langle \dots \rangle = T^{-1} \int_0^T (\dots) dt$ – оператор усереднення за

часом T ; $W(0) = W(\omega = 0) = \Delta_0^{-1} \begin{bmatrix} C & -C_x \\ -C_\alpha & G \end{bmatrix}$ – мат-

риця статичних коефіцієнтів передачі ЧЕ; $\Delta_0 = \Delta(\omega = 0) = CG - C_x C_\alpha$.

Згідно з рисунком та рівняннями (2) вихідні напруги ДП ЧЕ $\langle U_{\text{ДП}} \rangle$ та МКА $\langle U_{\text{вих}} \rangle$, що відповідають “відходам” (9) маятникового ЧЕ, визначаються формулами

$$\langle U_{\text{ДП}} \rangle = k_\alpha \alpha + k_x x = k_M \langle M \rangle + k_F \langle F \rangle,$$

$$\langle U_{\text{вих}} \rangle = k_\Pi \langle U_{\text{ДП}} \rangle = k_\Pi (k_M \langle M \rangle + k_F \langle F \rangle), \quad (10)$$

де $k_M = (k_\alpha C + k_x C_\alpha)\Delta_0^{-1} = (c_3 k_\alpha + c_{23} k_x)\Delta_0^{-1}$; $k_F = (k_x G - k_\alpha C_x)\Delta_0^{-1} = (c_\alpha k_x + c_{23} k_\alpha)\Delta_0^{-1}$; $k_\Pi = k_{\text{ПКЛ}} \times R_n (R_n + R_k)^{-1}$; R_n, R_k – відповідно електричні опори зовнішнього навантаження та катушки ЗКП. Підставивши у формулу (10) замість $\langle F \rangle$ та $\langle M \rangle$ вирази $F = mw_3$ і $M = Fl_c$, отримаємо вихідну напругу МКА, що відповідає вимірювальному акселерометром прискоренню $U_{\text{вих}} = k_\Sigma w_3$, де $k_\Sigma = k_\Pi (k_M l_c + k_F)$ – коефіцієнт перетворення акселерометра.

Відповідно, загальна формула для оцінки абсолютних адитивних ВП МКА від дії збуджуючого фактора ξ_l , який нас цікавить, має вигляд

$$\Delta_{\text{ВП}}(\xi_l) = \frac{\langle U_{\text{вих}}(\xi_l) \rangle}{k_\Sigma} = \frac{k_M \langle M(\xi_l) \rangle + k_F \langle F(\xi_l) \rangle}{(k_M l_c + k_F) m}. \quad (11)$$

Формули (4), (5) і (11) показують, що задача побудови математичної моделі методичних ВП МКА з ПП по суті зводиться до знаходження формул для визначення сталих складових $\langle \tilde{F}_1 \rangle$ і $\langle \tilde{F}_2 \rangle$ збуджень (4) і (5), які виникають відповідно в першому та другому наближенні, з наступною їх підстановкою у вираз (11) для обчислення значень цих похибок.

Перше наближення

Для знаходження розв’язку системи (3) у першому наближенні покладемо $\varepsilon = 0$. Підставивши (6) у (4), визначимо вираз для збуджень першого наближення

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(t) = & \begin{bmatrix} M_1(t) \\ F_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml_c \\ m \end{bmatrix} a_{3*} e^{j\omega_3 t} - \begin{bmatrix} J_{22} \\ ml_c \end{bmatrix} j\omega_2 b_{2*} e^{j\omega_2 t} + \\ & + \begin{bmatrix} J_{33} - J_{11} \\ ml_c \end{bmatrix} (b_{1*} b_{3*} e^{j(\omega_1 - \omega_3)t} + b_{1*} \bar{b}_{3*} e^{j(\omega_1 - \omega_3)t}) + \text{КС}. \end{aligned}$$

Аналіз цього виразу показує, що при $\omega_1 = \omega_3$ з'являються сталі складові збуджень

$$\begin{bmatrix} \langle M_1 \rangle \\ \langle F_1 \rangle \end{bmatrix} = 0,5 \begin{bmatrix} J_{33} - J_{11} \\ ml_c \end{bmatrix} b_1 b_3 \cos(\delta_1 - \delta_3),$$

які набувають максимальних значень $\langle M_1 \rangle_{\max}$ і $\langle F_1 \rangle_{\max}$ при $\delta_1 = \delta_3$ і дорівнюють нулю при $\delta_1 = 0,5\pi + \delta_3$.

З фізичної точки зору, причиною виникнення збуджуючого моменту $\langle M_1 \rangle$, який відповідає узагальнюючій координаті α , є відмінність від нуля різниці моментів інерції ЧЕ $J_{33} - J_{11}$, а виникнення збуджуючої сили $\langle F_1 \rangle$, що відповідає узагальнюючій координаті x – наявність ступеня свободи ЧЕ по даній координаті. Останнє характерне тільки для МКА з ПП ЧЕ.

Згідно з (11), максимальну ВП МКА, що виникає в першому наближенні, можна визначити за формулою

$$\Delta_{\text{ВП}}(\Omega_1 \Omega_3)_{\max} = \frac{k_M(J_{33} - J_{11}) + k_F ml_c}{2(k_M l_c + k_F) m w_3} b_1 b_3. \quad (12)$$

Запишемо необхідний для подальших викладок частинний розв'язок (7) системи (3) у першому наближенні в розгорнутому вигляді

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{\alpha 1} \\ W_{x 1} \end{bmatrix} a_{3*} e^{jn_3 t} + \begin{bmatrix} W_{\alpha 2} \\ W_{x 2} \end{bmatrix} j\omega_2 b_{2*} e^{j\omega_2 t} + \\ + \begin{bmatrix} W_{\alpha 3} \\ W_{x 3} \end{bmatrix} b_{1*} b_{3*} e^{j(\omega_1 + \omega_3)t} + \\ + \begin{bmatrix} W_{\alpha 4} \\ W_{x 4} \end{bmatrix} b_{1*} \bar{b}_{3*} e^{j(\omega_1 - \omega_3)t} + KC, \quad (13)$$

де

$$W_{\alpha 1} = W_{11}(n_3) ml_c - W_{12}(n_3) m;$$

$$W_{\alpha 2} = -W_{11}(\omega_2) J_{22} + W_{12}(\omega_2) ml_c;$$

$$W_{\alpha 3} = W_{11}(\omega_1 + \omega_3)(J_{33} - J_{11}) - W_{12}(\omega_1 + \omega_3) ml_c;$$

$$W_{\alpha 4} = W_{11}(\omega_1 - \omega_3)(J_{33} - J_{11}) - W_{12}(\omega_1 - \omega_3) ml_c; \quad (14)$$

$$W_{x 1} = -W_{21}(n_3) ml_c + W_{22}(n_3) m;$$

$$W_{x 2} = W_{21}(\omega_2) J_{22} + W_{22}(\omega_2) ml_c;$$

$$W_{x 3} = -W_{21}(\omega_1 + \omega_3)(J_{33} - J_{11}) + W_{22}(\omega_1 + \omega_3) ml_c;$$

$$W_{x 4} = -W_{21}(\omega_1 - \omega_3)(J_{33} - J_{11}) + W_{22}(\omega_1 - \omega_3) ml_c.$$

Подавши комплексні частотні ПФ (14) у показниковій формі

$$W_{\alpha i, xi}(\omega) = H_{\alpha i, xi}(\omega) e^{j\varphi_{\alpha i, xi}(\omega)}, \quad (15)$$

де $H_{\alpha i, xi}(\omega) = \left[\text{Re} W_{\alpha i, xi}(\omega) + \text{Im} W_{\alpha i, xi}(\omega) \right]^{0,5}$ – відповідні амплітудно-частотні характеристики (АЧХ);

$\varphi_{\alpha i, xi}(\omega) = -\text{arctg} \frac{\text{Im} W_{\alpha i, xi}(\omega)}{\text{Re} W_{\alpha i, xi}(\omega)}$ – фазо-частотні ха-

рактеристики, $i = \overline{1, 4}$, запишемо розв'язок (13) у зручному для використання в другому наближенні вигляді як скалярний добуток чотиривимірних векторів

$$\begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{* \alpha}^T \\ A_{* x}^T \end{bmatrix} e^{jvt} + \begin{bmatrix} A_{* \alpha}^T \\ A_{* x}^T \end{bmatrix} e^{jvt}, \quad (16)$$

де

$$A_{* \alpha}^T = \left[W_{\alpha 1, a_{3*}}, W_{\alpha 2, j\omega_2 b_{2*}}, W_{\alpha 3, b_{1*} b_{3*}}, W_{\alpha 4, b_{1*} \bar{b}_{3*}} \right];$$

$$v^T = [n_3, \omega_2, \omega_1 + \omega_3, \omega_1 - \omega_3];$$

$$e^{jvT} = [e^{jn_3 t}, e^{j\omega_2 t}, e^{j(\omega_1 + \omega_3)t}, e^{j(\omega_1 - \omega_3)t}].$$

Друге наближення

Знайдемо частинний розв'язок (7) системи (3) у другому наближенні, яке відповідає правій частині $\varepsilon \tilde{F}_2(t)$. Для цього попередньо підстановкою співвідношень (6) і (16) у формулу (5) визначимо доданки збуджень $M_2(\xi_i)$ і $F_2(\xi_i)$, що діють на ЧЕ МКА, у другому наближенні:

$$w_1 \alpha_1(t) = a_{1*} A_{* \alpha}^T e^{j(v + \tilde{n}_1)t} + \bar{a}_{1*} A_{* \alpha}^T e^{j(v - \tilde{n}_1)t} + KC,$$

$$\begin{aligned} (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \alpha_1(t) &= A_{* \alpha}^T (b_{1*}^2 e^{j(v+2\tilde{\omega}_1)t} + 0,5 b_1^2 e^{jvt} + \\ &+ \bar{b}_{1*}^2 e^{j(v-2\tilde{\omega}_1)t} - b_{3*}^2 e^{j(v+2\tilde{\omega}_3)t} - \\ &- 0,5 b_{3*}^2 e^{jvt} - \bar{b}_{3*}^2 e^{j(v-2\tilde{\omega}_3)t}) + KC, \quad (17) \end{aligned}$$

$$(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) [\alpha_1(t), x_1(t)]^T =$$

$$= A_{* \alpha}^T (b_{1*}^2 e^{j(v+2\tilde{\omega}_1)t} + 0,5 b_1^2 e^{jvt} +$$

$$+ \bar{b}_{1*}^2 e^{j(v-2\tilde{\omega}_1)t} + b_{2*}^2 e^{j(v+2\tilde{\omega}_2)t} + 0,5 b_2^2 e^{jvt} +$$

$$+ \bar{b}_{2*}^2 e^{j(\nu - 2\tilde{\omega}_2)t} + \text{КС},$$

де $\tilde{\omega}_i = [\omega_i, \omega_i, \omega_i, \omega_i]^T$; $\tilde{n}_i = [n_i, n_i, n_i, n_i]^T$, $i = \overline{1, 3}$.

Запишемо в розгорнутому вигляді вектори-стовпці комбінаційних частот, які стоять у показниках експонент у виразах (17):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \tilde{n}_1 &= \\ &= [n_3 + n_1, \omega_2 + n_1, \omega_2 + \omega_3 + n_1, \omega_1 - \omega_3 + n_1]^T, \\ \mathbf{v} - \tilde{n}_1 &= \\ &= [n_3 - n_1, \omega_2 - n_1, \omega_1 + \omega_3 - n_1, \omega_1 - \omega_3 - n_1]^T, \\ \mathbf{v} + 2\tilde{\omega}_1 &= [n_3 + 2\omega_1, \omega_2 + 2\omega_1, 3\omega_1 + \omega_3, 3\omega_1 - \omega_3]^T, \\ \mathbf{v} - 2\tilde{\omega}_1 &= [n_3 - 2\omega_1, \omega_2 - 2\omega_1, \omega_3 - \omega_1, -\omega_1 - \omega_3]^T, \\ \mathbf{v} + 2\tilde{\omega}_2 &= \\ &= [n_3 + 2\omega_2, 3\omega_2, \omega_1 + \omega_3 + 2\omega_2, \omega_1 - \omega_3 + 2\omega_2]^T, \\ \mathbf{v} - 2\tilde{\omega}_2 &= \\ &= [n_3 - 2\omega_2, -\omega_2, \omega_1 + \omega_3 - 2\omega_2, \omega_1 - \omega_3 - 2\omega_2]^T, \\ \mathbf{v} + 2\tilde{\omega}_3 &= \\ &= [n_3 + 2\omega_3, \omega_2 + 2\omega_3, \omega_1 + 3\omega_3, \omega_1 + \omega_3]^T, \\ \mathbf{v} - 2\tilde{\omega}_3 &= [n_3 - 2\omega_3, \omega_2 - 2\omega_3, \omega_1 - \omega_3, \omega_1 - 3\omega_3]^T. \end{aligned} \quad (18)$$

У виразах (16) і (18) підкреслено елементи векторів комбінаційних частот, які при визначених ВЗ і КК призводять до виникнення сталих складових збуджень $\langle M_2 \rangle$ і $\langle F_2 \rangle$, якщо підкреслені комбінації частот будуть дорівнювати нулю. Ці збудження, згідно з (9), спричиняють “відходи” ЧЕ МКА $\langle \alpha_2 \rangle$ і $\langle x_2 \rangle$, що нас цікавлять, у другому наближенні.

Виділимо у формулах (17) сталі складові та запишемо під кожною складовою співвідношення частот ВЗ і КК, при якому вони з’являються

$$\begin{aligned} \langle w_1 \alpha_1 \rangle &= \underbrace{a_{1*} W_{\alpha 4} b_{1*} \bar{b}_{3*}}_{\omega_1 + n_1 = \omega_3} + \bar{a}_{1*} \left(\underbrace{W_{\alpha 1} a_{3*}}_{n_1 = n_3} + \underbrace{W_{\alpha 2} j \omega_2 b_{2*}}_{n_1 = \omega_2} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{W_{\alpha 3} b_{1*} b_{3*}}_{n_1 = \omega_1 + \omega_3} + \underbrace{W_{\alpha 4} b_{1*} \bar{b}_{3*}}_{n_1 + \omega_3 = \omega_1} \right) + \text{КС}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \alpha_1 \rangle &= \\ &= \underbrace{W_{\alpha 4} b_{1*}^3 \bar{b}_{3*}}_{3\omega_1 = \omega_3} + 0,5 \underbrace{W_{\alpha 4} b_{1*} \bar{b}_{3*}}_{\omega_1 = \omega_3} + b_{1*}^2 \left(\underbrace{W_{\alpha 1} a_{3*}}_{n_3 = 2\omega_1} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{W_{\alpha 2} j \omega_2 b_{2*}}_{\omega_2 = 2\omega_1} + \underbrace{W_{\alpha 3} b_{1*} b_{3*}}_{\omega_1 = \omega_3} \right) - \\ &\quad - 0,5 \underbrace{b_{3*}^2 W_{\alpha 4} b_{1*} \bar{b}_{3*}}_{\omega_1 = \omega_3} - \bar{b}_{3*}^2 \left(\underbrace{W_{\alpha 1} a_{3*}}_{n_3 = 2\omega_3} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{W_{\alpha 2} j \omega_2 b_{2*}}_{\omega_2 = 2\omega_3} + \underbrace{W_{\alpha 3} b_{1*} b_{3*}}_{\omega_1 = \omega_3} + \underbrace{W_{\alpha 4} b_{1*} \bar{b}_{3*}}_{\omega_1 = 3\omega_3} \right) + \text{КС}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) [\alpha_1, x_1]^T \rangle &= \underbrace{W_{\alpha 4} b_{1*}^3 \bar{b}_{3*}}_{\substack{x4 \\ 3\omega_1 = \omega_3}} + 0,5 (b_{1*}^2 + \\ &\quad + b_{2*}^2) \underbrace{W_{\alpha 4} b_{1*} \bar{b}_{3*}}_{\omega_1 = \omega_3} + \bar{b}_{1*}^2 \left(\underbrace{W_{\alpha 1} a_{3*}}_{n_3 = 2\omega_1} + \underbrace{W_{\alpha 2} j \omega_2 b_{2*}}_{\omega_2 = 2\omega_1} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{W_{\alpha 3} b_{1*} b_{3*}}_{\omega_1 = \omega_3} + \underbrace{W_{\alpha 4} b_{1*} b_{2*}^2 \bar{b}_{3*}}_{\omega_3 = \omega_1 + 2\omega_2} + \bar{b}_{2*}^2 \left(\underbrace{W_{\alpha 1} a_{3*}}_{n_3 = 2\omega_2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \underbrace{W_{\alpha 3} b_{1*} b_{3*}}_{\omega_1 + \omega_3 = 2\omega_2} + \underbrace{W_{\alpha 4} b_{1*} \bar{b}_{3*}}_{\omega_1 = \omega_3 + 2\omega_2} \right) \right) + \text{КС}. \end{aligned}$$

Згідно з (5), запишемо максимальні значення сталих складових збуджень, що діють на ЧЕ МКА, у другому наближенні

$$\begin{aligned} \langle F_2 \rangle_{\max} &= -ml_c \langle (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \alpha_1 \rangle_{\max} + m \langle (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) x_1 \rangle_{\max}, \\ \langle M_2 \rangle_{\max} &= ml_c \langle w_1 \alpha_1 \rangle_{\max} + \quad (20) \end{aligned}$$

$$+ (J_{33} - J_{11}) \langle (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \alpha_1 \rangle_{\max} + ml_c \langle (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) x_1 \rangle_{\max}.$$

Визначимо умови, при яких праві частини (20) мають максимальні значення, та отримаємо формули для їх обчислення. Для цього поставимо вимогу, щоб усі елементи матриці (5) були додатними (для реальних ЧЕ МКА завжди $J_{33} - J_{11} > 0$). Розкриємо згідно з (6) комплексні амплітуди a_{i*} , b_{i*} , $i = \overline{1, 3}$, та подамо передавальні функції $W_{\alpha i}$, $W_{x i}$, $i = \overline{1, 4}$, у показниковій формі (15). При цьому максимальні значення амплітудно-частотних характеристик (15), які існують на резонансних частотах ω_p відповідних АЧХ,

виразимо через показники коливальності $\mu_{\alpha_i, xi}$ цих АЧХ формулою

$$H_{\alpha_i, \max, xi} = H_{\alpha_i, xi}(\omega_p) = \mu_{\alpha_i, xi} H_{\alpha_i, xi}(0).$$

Щоб спростити подальші викладки, візьмемо одне значення μ , найбільше з усіх: $\mu = (\mu_{\alpha_i, \mu_{xi}}) \approx 1,2-2$, $i = \overline{1, 4}$. Тоді матимемо

$$H_{\alpha_i, \max, xi} = \mu H_{\alpha_i, xi}(0). \quad (21)$$

Вирази для визначення $H_{\alpha_i, xi}(0)$, які входять у (21), отримаємо з (8) і (14) у вигляді

$$H_{\alpha_1}(0) = (ml_c C - m C_x) \Delta_0^{-1},$$

$$H_{\alpha_2}(0) = (ml_c C_x - J_{22} C) \Delta_0^{-1},$$

$$H_{\alpha_3}(0) \neq H_{\alpha_4}(0) = [(J_{33} - J_{11}) C - ml_c C_x] \Delta_0^{-1},$$

$$H_{x_1}(0) \neq (mG - ml_c C_\alpha) \Delta_0^{-1},$$

$$H_{x_2}(0) = (J_{22} C_\alpha - ml_c G) \Delta_0^{-1},$$

$$H_{x_3}(0) = H_{x_4}(0) \neq [ml_c G - (J_{33} - J_{11}) C_\alpha] \Delta_0^{-1}.$$

Підставивши рівності (21) у (15), а (15) у (19), визначимо умови, при яких доданки (19) із знаком мінус змінюють свій знак на плюс, а із знаком плюс – не змінюють його. Це буде виконуватись, якщо сума фаз у відповідних доданків дорівнюватиме в першому випадку π ($e^{j\pi} = -1$), а в другому – нулю ($e^{j0} = 1$). Враховуючи зроблені зауваження, записуємо вираз для обчислень максимальних значень доданків, які входять до правих частин (20):

$$\langle w_1 \alpha_1 \rangle_{\max} = 0,25\mu \sum_{j=1}^5 E_{1j}, \langle (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \alpha_1 \rangle_{\max} = 0,25\mu \sum_{j=1}^{10} E_{2j},$$

$$\langle (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \alpha_1 \rangle_{\max} = 0,25\mu \sum_{j=1}^9 E_{3j}. \quad (22)$$

$$\langle (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) x_1 \rangle_{\max} = 0,25\mu \sum_{j=1}^9 E_{4j}.$$

Формули для визначення величин E_{ij} ($i = \overline{1, 4}$), які входять у (22), мають досить простий

вигляд (наприклад, $E_{11} = H_{\alpha_4}(0) a_1 b_1 b_3$, $E_{24} = H_{\alpha_2}(0) \omega_2 b_1^2 b_2$) і при врахуванні обмеженого обсягу статті тут не наводяться. Проте треба відзначити, що в (22) є доданки, які залежать не тільки від амплітуд ВЗ і КК, але й від частоти ω_2 КК основи відносно осі x_2^0 ($ij = 13, 24, 28, 34, 44$).

Аналітичні вирази, які описують у другому наближенні ВП МКА від ВЗ і КК основи, одержуються після підстановки (22) у (20), а співвідношень (20) – у загальну формулу (11) для оцінки ВП.

З фізичної точки зору, методичні ВП МКА з ПП у другому наближенні від дії збурень, які визначаються формулами (20), є проявом відомого випрямного ефекту Максвелла–Капиці [5], тобто ефекту систематичного зміщення точки підвісу, навколо якої відбуваються кутові коливання маятника. Проте у випадку з МКА з ПП прояв цього ефекту більш широкий, оскільки одночасно виникають кутові $\langle \alpha_2 \rangle$ та лінійні $\langle x_2 \rangle$ зміщення точки коливань, кожне з яких робить свій внесок у загальний випрямний ефект. Досить велике сполучення комбінаційних частот ВЗ і КК (18), на яких виникають сталі складові “відходів” ЧЕ $\langle \alpha_2 \rangle$ і $\langle x_2 \rangle$ призводять до ВП МКА, які визначаються суто ВЗ (члени (22), які містять $a_1 a_3$), суто КК ($b_1^m b_2^n b_3^p$, $m, n, p = \overline{0, 3}$), а також спільною дією ВЗ і КК ($a_1, b_1^m b_2^n b_3^p$, $m, n, p = \overline{0, 2}$).

3

Приклад обчислення вібраційних похибок

Обчислимо ВП навігаційного МКА з ПП типу АК-6 за отриманими в статті формулами. Три таких акселерометри спільно з трьома лазерними гіроскопами (ЛГ) типу “Гранат-1М” входять до складу блока чутливих елементів (БЧЕ) авіаційної безплатформної ІНС (БІНС) “БІНС-85”.

Відзначимо, що для якісної роботи БІНС рівень ВП МКА в умовах експлуатації системи не повинен перевищувати $10^{-4}-10^{-3}$ м/с² [1]. У виконанні цієї умови і полягає суть задачі забезпечення вібростійкості акселерометрів. Параметри МКА АК-6 беремо такими:

$$m = 4,14 \cdot 10^{-4} \text{ кг}; l_c = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; J_{22} = 7,25 \cdot 10^{-9} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$C_3 = 342,4 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}; G = 7,31 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{рад}^{-1};$$

$$C_{23} = 0,457 \text{ Н}; b = 9,2 \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; b_3 = 0,15 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1};$$

$$k_\alpha = 1,12 \text{ В} \cdot \text{рад}^{-1}; k_{\text{ПКЛ}} = 18; k_{\text{ЗКП}} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{В}^{-1}.$$

За джерело ВЗ виберемо задані в міжнародних стандартах [6] для авіаційної техніки параметри просторових вібрацій основи з амплітудами $a_i = 200 \text{ м/с}^2$ у діапазоні частот 5–2000 Гц, а за основне джерело КК (поряд з просторовими КК основи) – збудження, що діють на МКА з боку вібропідвісів ЛГ, які здійснюють кутові коливання БЧЕ навколо його вимірювальних осей з амплітудами $b_i \approx 5 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ на частотах $f_i = \omega_i \times (2\pi)^{-1} = 400 \text{ Гц}$.

Результати обчислень ВП МКА АК-6 за загальною формулою (11) при $\mu = 1,5$ наведені в таблиці. Їх аналіз показує, що розглянуті в статті методичні ВП від ряду збуджень значно пере-

вищують допустимий для цілей інерціальної навігації рівень. Це може значно знизити точність навігаційних МКА з ПП в реальних умовах експлуатації і робить актуальною задачу забезпечення потрібної вібростійкості даного типу маятникових компенсаційних акселерометрів.

Висновки

Розроблена узагальнена математична модель ВП МКА з ПП дає змогу отримати аналітичні вирази (11) для оцінки цих похибок у найбільш загальних умовах просторового коливання руху основи з довільним сполученням частот та початкових фаз детермінованих ВЗ та КК.

Наявність пружного підвісу ЧЕ значно розширює кількість методичних ВП МКА порівняно з МКА з класичним жорстким маятниковим підвісом ЧЕ, внаслідок того, що одночасно виникають кутові $\langle \alpha \rangle$ та лінійні $\langle x \rangle$ “відходи” ЧЕ, кожен з яких додає свій внесок у загальний випрямний ефект. При цьому у першому наближенні ВП виникають згідно з (12) від впливу центробіжних сил і моментів інерції, що діють у площині x_1x_3 ЧЕ, а у другому наближенні – як різноманітний прояв випрямного ефекту Максвелла–Капиці одночасно по кутовій та лінійній координатам руху ЧЕ.

Обчислені в статті методичні ВП навігаційного МКА з ПП типу АК-6 свідчать про значне погіршення точності таких МКА в реальних умовах експлуатації. Використання отриманих в статті формул для розрахунку ВП на етапі проектування МКА з ПП дозволить суттєво збільшити вібростійкість таких акселерометрів за рахунок вибору потрібних значень їх конструктивних параметрів.

В подальшому доцільно на підставі запропонованих в статті підходів, методом послідовних наближень розробити математичну модель інструментальних ВП МКА, які виникають в реальних умовах експлуатації внаслідок нелінійності реальних функцій перетворення основних функціональних вузлів акселерометра (ДП, ПКЛ, ЗКП тощо).

Таблиця. Числові оцінки методичних ВП МКА з ПП типу АК-6

Співвідношення частот ВЗ і КК	Значення частот f_i , Гц	Величина ВП Δw , $10^{-3} \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$
$n_1 = n_3$	0,05–20	20
$\omega_1 = \omega_3$	4	112
$\omega_3 = 3\omega_1$	$\omega_1 = 4$	0,006
$\omega_1 = 3\omega_3$	$\omega_3 = 4$	0,006
$\omega_2 = 2\omega_1$	$\omega_1 = 4$	4,1
$\omega_2 = 2\omega_3$	$\omega_3 = 4$	4,1
$2\omega_2 = \omega_3 + \omega_3$	$\omega_1 = 6 \ \omega_3 = 10$	50
$2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$	$\omega_1 = 8 \ \omega_2 = 10$	0,9
$\omega_3 = \omega_1 + 2\omega_2$	$\omega_1 = 4 \ \omega_2 = 6$	5,3
$\omega_1 = \omega_3 + 2\omega_2$	$\omega_2 = 4 \ \omega_3 = 2$	2,4
$0,5\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$	$\omega_1 = 4 \ \omega_3 = 4$	42
$\omega_3 = \omega_1 + 0,5\omega_2$	$\omega_1 = 4 \ \omega_2 = 8$	4,2
$\omega_1 = \omega_3 + 0,5\omega_2$	$\omega_2 = 6 \ \omega_3 = 8$	4,2
$n_3 = 2\omega_2$	$\omega_2 = 4$	4,1
$n_3 = 2\omega_3$	$\omega_3 = 4$	30
$\omega_3 = 2\omega_1$	$\omega_1 = 4$	30
$n_1 = \omega_1 + \omega_3$	$\omega_1 = 4 \ \omega_3 = 4$	0,02
$\omega_3 = n_1 + \omega_1$	$\omega_1 = 4 \ n_1 = 6$	0,09
$\omega_1 = n_1 + \omega_3$	$\omega_3 = 4 \ n_1 = 6$	0,09
$n_1 = \omega_2$	$\omega_2 = 4$	5

Н.Г. Черняк

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДИЧЕСКИХ ВИБРАЦИОННЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ МАЯТНИКОВОГО КОМПЕНСАЦИОННОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА С УПРУГИМ ПОДВЕСОМ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

M.G. Chernyak

MATHEMATICAL MODEL OF CONTINUOUS VIBRATORY ERRORS OF THE PENDULOUS COMPENSATING ACCELEROMETER WITH A SENSITIVE ELEMENT RESILIENT SUSPENSION

The present paper develops a mathematical model

Разработана математическая модель методических вибрационных погрешностей маятникового компенсационного акселерометра с упругим подвесом чувствительного элемента, возникающих в наиболее общих условиях пространственного колебательного движения основания. Получены аналитические формулы для вычисления этих погрешностей и выполнен их расчет для навигационного акселерометра типа АК-6.

of the continuous vibratory errors of the compensating accelerometer with a sensitive element resilient suspension. The described errors appear in most general conditions of a spatial oscillatory motion of the pendulous base. Furthermore, the analytic formulas for calculating these errors are obtained, and the calculations of these errors for the navigation accelerometer АК-6 are carried out.

1. *Lawrence A.* Modern Inertial Technology: Navigation, Guidance and Control. – N.-Y.: Springer-Verlag. – 2004. – P. 280.
2. *Коновалов С.Ф.* Теория виброустойчивости акселерометров. – М.: Машиностроение, 1991. – 272 с.
3. *Ионин А.М., Слюсарь В.М.* Погрешность маятникового компенсационного акселерометра с упругим подвесом при работе в условиях пространственной вибрации // Механика гироскопических систем: Межвед. науч.-техн. сб. – К.: "Либідь", 1989. – Вып. 8. – С. 29–34.
4. *Евгеньев В.С.* Влияние упругой податливости опор подвеса маятника на систематическую погрешность акселерометра при вибрации основания // Там же. – 1984. – Вып. 3. – С. 15–18.
5. *Луниц Я.Л.* Ошибки гироскопических приборов. – Л.: Судостроение, 1968. – 232 с.
6. *Качество электронных компонентов и систем* // Электронные компоненты и системы. – 1996. – № 5. – С. 3–7.

Рекомендована Радою НАЦ критичних технологій навігаційного приладобудування НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
12 березня 2008 року