

УДК 629.76

О.П. Мариношенко

## ВИЗНАЧЕННЯ НАВАНТАЖЕНЬ ВІД ВЗАЄМОДІЇ КОНСОЛЬНОЇ БАЛКОВОЇ СИСТЕМИ І НАБІГАЮЧОГО ПОВІТРЯНОГО ПОТОКУ

### Вступ

Визначення навантажень від взаємодії матеріальних тіл з набігаючими потоками газів або рідин є важливою і актуальною задачею сьогодення, особливо при проектуванні різного типу літальних апаратів, технологічних машин та будівельних споруд. Задачі обтікання повітряним потоком твердих тіл, аеродинамічних профілів присвячено велику кількість наукових досліджень видатних вітчизняних і зарубіжних вчених [1–3]. У працях за даною тематикою розглядаються та застосовуються різноманітні способи і підходи щодо визначення навантажень від дії на механічні об'єкти газових та рідинних потоків і водночас з цим велика увага приділяється розгляду динамічної взаємодії вказаних потоків та механічних об'єктів.

### Постановка задачі

Метою даної статті є вивчення взаємодії консольної балкової системи з набігаючим повітряним потоком. При цьому розглядається той факт, що в консольній балковій системі можуть виникати деформації, причиною яких є зростаючі зовнішні навантаження, що залежать від швидкості набігаючого повітряного потоку. Такі зовнішні навантаження носять аеродинамічний характер, тому їх визначення можна проводити в деформованій і недеформованій конфігураціях. При цьому спочатку потрібно знаходити розподілені навантаження, а потім визначити інтегральні зведені характеристики.

### Опис механічної системи, припущення і системи відліку

Об'єктом досліджень є консольна балкова система (КБС) у вигляді крила літального апарата (ЛА). Розглянемо крило в початковій конфігурації  $C_0$  (недеформований стан). Конфігурацію  $C_0$  визначимо таким чином: вважаємо, що на крило набігає з "нескінченності" потік повітря, матеріальні частинки якого рухаються по прямолінійних траєкторіях із сталою швидкістю  $V_0$ .

Припускаємо, що до певного значення  $V_0$  крило обтікається плавно, без зривів і істотних вихрових рухів; при цьому в крилі виникають незначні переміщення (лінійні і кутові), якими можна знехтувати. Вважаємо, що вказаний потік забезпечує появу підйомної сили і тим самим політ літального апарата. Це – початковий стан ЛА.

Нехай у деякий момент часу швидкість повітряного потоку значно зростає і досягає критичного значення  $V_0^*$ , при якому на крило значно збільшується тиск, що нерівномірно розподіляється по всій поверхні крила. Через відсутність певної симетрії крила воно почне згинатись і одночасно закручуватись. Стан крила, який виникає при певній швидкості набігаючого потоку і спричиняє появу згинальних і крутильних переміщень, називатимемо конфігурацією  $C_r$ . Надалі величини, які відносяться до деформованого стану, будемо позначати "\*".

Вибираємо контрольний об'єм у формі циліндра певного радіуса  $R$ , в якому розмістимо вказану КБС (рис. 1).

На рис. 1  $Sxyz$  – інерціальна система координат (СК) з ортами  $\mathbf{i}_z, \mathbf{j}_z, \mathbf{k}_z$ , початок якої знаходиться в кореновому перерізі КБС у центрі мас – точці  $C$ ;  $Sx_z y_z z_z$  – локальна система координат з початком у точці  $C_z$ ;  $C_z$  – точка осі, що проходить через центри мас поперечних перерізів КБС. Тоді локальну систему відліку в конфігурації  $C_r$  з початком в точці  $C_z^*$  позначимо  $S_z^* x_z^* y_z^* z_z^*$ , а відповідні орти базису –  $\mathbf{i}_z^*, \mathbf{j}_z^*, \mathbf{k}_z^*$ .

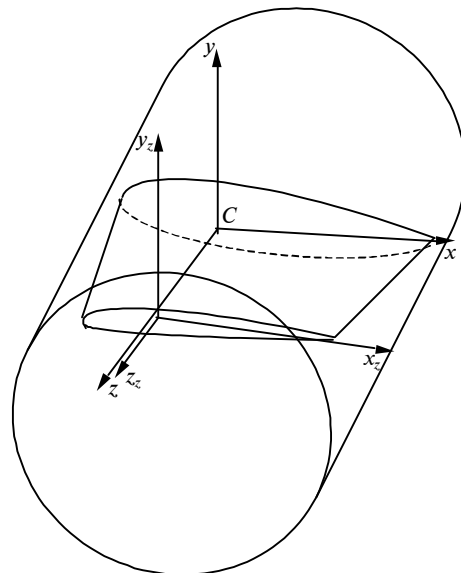


Рис. 1. КБС і контрольний об'єм у вигляді циліндра

Сформулюємо основні співвідношення для виділеного контрольного об'єму повітряного потоку в циліндричній СК з початком в точці  $C$ . Циліндричні координати позначаємо  $r, \varphi, z$ , а полярні координати довільної точки профілю на відстані  $z - \rho = \rho(\varphi), \varphi$ .

Використовуємо підхід Лагранжа для опису руху матеріальної частинки повітряного потоку. Введемо вектор переміщення матеріальної частинки  $U$  для випадку ортогональної, циліндричної системи координат з ортами  $e_r, e_\varphi, e_z$ :

$$U = U_r e_r + U_\varphi e_\varphi + U_z e_z. \quad (1)$$

Розглянемо довільний переріз КБС і контрольного об'єму (рис. 2).

На рис. 2 система координат  $C_0 x_i y_i z_i$  розміщена в кореневому перерізі; матеріальна частинка знаходиться на відстані  $z = \text{const}$  від площини  $C_0 x_i y_i$ .

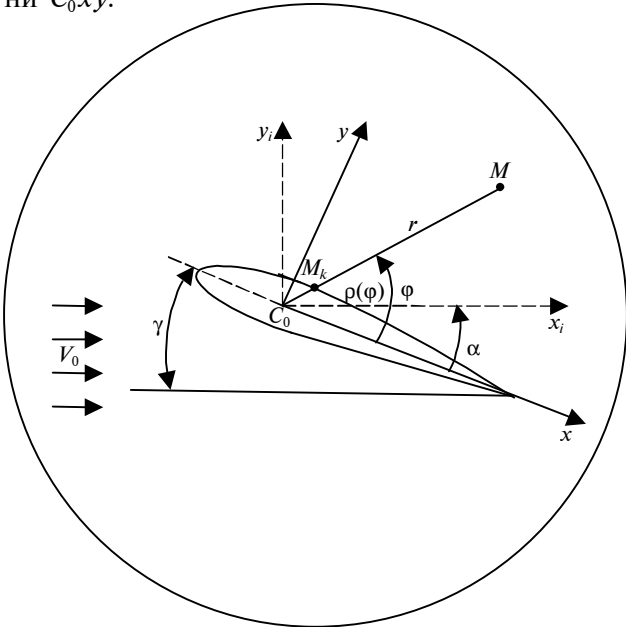


Рис. 2. Системи координат у вибраному перерізі КБС

Припускаємо, що в момент часу  $t (t > 0)$  в конфігурації  $C_t$  контрольний об'єм не змінює своїх розмірів і орієнтацію в просторі, а система координат  $C_0 x_i y_i z_i$  залишається нерухомою; крило zdeформувалось, його поперечні перерізи зайняли певне положення.

У праці [4] було встановлено формулу, яка описує залежність тиску набігаючого повітряного потоку на контур поперечного перерізу КБС (див. формулу (32) в [4]):

$$p_z(z, \varphi) =$$

$$= \rho \left\{ \frac{p_A}{\rho_A} - \frac{1}{2} \frac{n-1}{2} \left[ \left( \frac{\partial U_r}{\partial t} \cos \varphi - \frac{\partial U_\varphi}{\partial t} \sin \varphi \right)^2 \right]_B + \right. \\ \left. + 4 \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial t} \right|_A^2 + \frac{\partial U_z}{\partial t} \right|_B^2 \left. \right\} - \frac{n-1}{n} g p_z(\varphi) \sin \varphi. \quad (2)$$

Використаємо формули для визначення головного вектора і головного моменту від сил тиску, які прикладаються до осі, що проходить через центри мас поперечних перерізів КБС [4]:

$$-h(z) \int_0^{2\pi} (p_z(z, \varphi) \sqrt{\rho_0'^2 + \rho_0^2} \mathbf{n}^* d\varphi) dz, \quad (3)$$

$$-h^2(z) \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}_p \times p_z(z, \varphi) \rho_0(\varphi) \sqrt{\rho_0'^2 + \rho_0^2} \mathbf{n}^* d\varphi) dz. \quad (4)$$

Таким чином, підставивши у вирази (3), (4) співвідношення (2), отримаємо формули, за допомогою яких можна проводити розрахунок залежності головного вектора і головного моменту від дії зовнішнього аеродинамічного навантаження, зведених до центра мас профілю довільного перерізу КБС із врахуванням деформованості самого профілю.

### Виведення уточненої формули для визначення кута атаки для профілю КБС в деформованому стані

Розглядаємо процес обтікання профілю КБС (див. рис. 2).

З рис. 2 видно, що тангенс кута атаки становить  $\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{i}_z}{\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_z}$ . Цю формулу може-

мо записати в загальному вигляді для деформованого стану КБС, при цьому будемо використовувати таблицю напрямних косинусів між ортами систем координат у деформованому і недеформованому станах (конфігурації в  $C_0$  і  $C_t$ ), яка наведена в праці [5].

При цьому позначимо

$$\mathbf{j}_i = \sin \alpha \mathbf{i}_z + \cos \alpha \mathbf{j}_z + 0 \mathbf{k}_z,$$

$$\mathbf{i}_i = \cos \alpha \mathbf{i}_z + \sin \alpha \mathbf{j}_z + 0 \mathbf{k}_z,$$

$$\mathbf{i}_z^* = (1 + c_1) \mathbf{i}_z + b_1 \mathbf{j}_z - \frac{\partial v_0}{\partial z} \mathbf{k}_z.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha^* &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{b_1}{(1+c_1)}}{1 + \frac{b_1}{(1+c_1)}\operatorname{tg}\alpha} = \{c_1 = 0\} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + b_1}{1 + b_1\operatorname{tg}\alpha} \\ &= \operatorname{tg}\alpha + b_1 + \operatorname{tg}\alpha^2 b_1 + b_1^2 \operatorname{tg}\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha + b_1. \end{aligned} \quad (5)$$

З формули видно, що вона не залежить від згину в площині  $C_z x_z y_z$ , оскільки відбувається просторовий прямолінійний рух повітря із сталою швидкістю, а жорсткість в напрямі осі  $C_z x_z$  вважаємо нескінченно великою  $\left(c_1 = 0; \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0; v_0 = 0\right)$ .

#### Визначення підйомної сили, сили аеродинамічного опору та аеродинамічного моменту

Визначимо аеродинамічну підйомну силу елемента крила товщиною  $dz$ . Розкладемо вектор зовнішнього навантаження  $d\mathbf{P}_{n^*}$  по ортах швидкісної СК. Осі цієї СК позначимо  $C_{x_v}, C_{y_v}, C_{z_v}$ , які будуть направлені паралельно осям вибраної раніше інерціальної СК. Тоді підйомна сила і сила лобового опору виділеного елемента крила визначатиметься так:

$$dY = d\mathbf{P}_{n^*} \cdot \mathbf{j}_i, \quad dR = -d\mathbf{P}_{n^*} \cdot \mathbf{i}_i, \quad (6)$$

де  $d\mathbf{P}_{n^*}$  – рівнодіюча сил від взаємодії КБС і набігаючого повітряного потоку.

Обчислимо  $dY$  і  $dR$  за раніше встановленими формулами. Будемо використовувати формули (3), (4) для головного вектора і головного моменту аеродинамічних сил та вираз для визначення тиску (2), що діє на поверхню аеродинамічного контуру КБС. Нам необхідно визначити вектор зовнішньої нормалі  $\mathbf{n}^*$  (див. рис. 2) до поверхні КБС в деформованому стані і відобразити її компонентами в базисі циліндричної системи координат з ортами  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ , початок якої збігається з початком СК, вибраної раніше. Для цього, використовуючи таблицю напрямних косинусів між ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  і  $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$  [5], знаходимо зовнішню нормаль  $\mathbf{n}^*$  до поверхні КБС в деформованому стані

$$\mathbf{n}^* \approx (n_i^* - n_j^* b_1) \mathbf{i}_z + (n_i^* b_1 + n_j^*) \mathbf{j}_z - n_j^* \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \mathbf{k}_z^*, \quad (7)$$

де  $n_i^*, n_j^*$  – проекції на осі СК  $C_0 x_i y_i z_i$  зовнішньої нормалі до поверхні аеродинамічного кон-

туру КБС в деформованому стані, які визначаються за формулами

$$n_i^* = \frac{\rho'_z(\varphi) \sin \varphi - \rho_z(\varphi) \cos \varphi}{\sqrt{\rho_z'^2 + \rho_z^2}}, \quad (8)$$

$$n_j^* = \frac{\rho'_z(\varphi) \cos \varphi - \rho_z(\varphi) \sin \varphi}{\sqrt{\rho_z'^2 + \rho_z^2}}.$$

Вираз для нормалі  $\mathbf{n}^*$  в циліндричній СК має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^* &= [(n_{iz}^* - n_{jz}^* b_1) \cos \varphi + (n_{iz}^* b_1 + n_{jz}^*) \sin \varphi] \mathbf{e}_r + \\ &+ [-(n_{iz}^* - n_{jz}^* b_1) \sin \varphi + (n_{iz}^* b_1 + n_{jz}^*) \cos \varphi] \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ n_{jz}^* \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Використовуючи вирази для головного вектора і головного моменту сил тиску та формулу (9), записуємо вираз для головного вектора

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_{n^*} &= \\ &= -h(z) \left( \int_0^{2\pi} p(z, \varphi) (\rho'_z(\varphi) \sin \varphi - \rho_z(\varphi) \cos \varphi) d\varphi \right) dz \mathbf{i}_z^* + \\ &+ h(z) \left( \int_0^{2\pi} p(z, \varphi) (\rho'_z(\varphi) \cos \varphi - \rho_z(\varphi) \sin \varphi) d\varphi \right) dz \mathbf{j}_z^*; \end{aligned} \quad (10)$$

компонентами розкладу  $d\mathbf{P}_{n^*}$  в базисі  $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*)$  є  $p_{z,z}^*, p_{z,y}^*, p_{z,x}^*$

З іншого боку, формулу (10) як в деформованому, так і в недеформованому станах можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_{n^*} &= (p_{z,z}^* \mathbf{k}_z^* + p_{z,y}^* \mathbf{j}_z^* + p_{z,x}^* \mathbf{i}_z^*) dz = \\ &= (p_{z,z} \mathbf{k}_z + p_{z,y} \mathbf{j}_z + p_{z,x} \mathbf{i}_z) dz = \\ &= \left[ \underbrace{\left( -p_{z,y}^* \frac{\partial \omega_0}{\partial z} - p_{z,x}^* \frac{\partial v_0}{\partial z} \right)}_{p_{z,z}} \mathbf{k}_z + \right. \\ &+ \underbrace{(p_{z,y}^* (1 + b_2) + p_{z,x}^* b_1)}_{p_{z,y}} \mathbf{j}_z + \\ &\left. + \underbrace{(p_{z,y}^* b_1 + p_{z,x}^* (1 + c_1))}_{p_{z,x}} \mathbf{i}_z \right] dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Тоді для підйомної сили і сили лобового опору отримаємо

$$dY = [p_{z,y}^* b_1 + p_{z,x}^* (1 + c_1)] \sin \alpha + [p_{z,y}^* (1 + b_2) + p_{z,x}^* b_1] \cos \alpha, \quad (12)$$

$$dR = -[p_{z,y}^* b_1 + p_{z,x}^* (1 + c_1)] \cos \alpha - [p_{z,y}^* (1 + b_1) + p_{z,x}^* b_1] \sin \alpha. \quad (13)$$

Формула для головного моменту в проекції на вісь  $Cz$  (орт  $\mathbf{k}_z^*$ ) має вигляд

$$\begin{aligned} d\mathbf{m}_{n^*} &= -h^2(z) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}_\rho \times \mathbf{n}^* [p(z, \varphi) \rho(\varphi) \sqrt{\rho_z'^2 + \rho_z^2} d\varphi]) dz = \\ &= -\mathbf{k}_z^* h^2(z) \left( \int_0^{2\pi} [p(z, \varphi) (\rho_z'(\varphi) \sin^2 \varphi - \rho_z'(\varphi) \cos^2 \varphi) \rho(\varphi) d\varphi] dz \right) \quad (14) \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} d\mathbf{m}_{n^*} &= m_{z,z}^* \mathbf{k}_z^* = m_{z,z}^* \mathbf{k}_z + m_{z,z}^* \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \mathbf{j}_z + m_{z,z}^* \frac{\partial \nu_0}{\partial z} \mathbf{i}_z \approx \\ &\approx m_{z,z}^* \mathbf{k}_z = -h^2(z) \times \\ &\times \left( \int_0^{2\pi} [p(z, \varphi) \rho(\varphi) (\rho_z'(\varphi) \cos 2\varphi) d\varphi] dz \right) \mathbf{k}. \quad (15) \end{aligned}$$

### Визначення густини повітряного потоку

Для визначення густини  $\rho$  набігаючого повітряного потоку, який діє на КБС в контрольному об'ємі, скористаємося рівнянням нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (16)$$

де  $\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$  – вектор швидкості матеріальних частинок набігаючого повітряного потоку;  $\mathbf{U}$  – вектор переміщень матеріальної частинки набігаючого потоку, проекції якого на орти СК, що зв'язана з контрольним об'ємом, запишемо у вигляді

$$U_r = V_0 t \cos \varphi + \zeta_r(z) \left( \frac{A_2^{(c)}(t)}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{A_3^{(c)}(t)}{r^3} \cos 3\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{A_2^{(s)}(t)}{r^2} \sin 2\varphi + \frac{A_3^{(s)}(t)}{r^3} \sin 3\varphi + \dots \right),$$

$$\begin{aligned} U_\varphi &= V_0 t \sin \varphi + \zeta_\varphi(z) \left( \frac{B_2^{(c)}(t)}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{B_3^{(c)}(t)}{r^3} \cos 3\varphi + \right. \\ &\left. + \frac{B_2^{(s)}(t)}{r^2} \sin 2\varphi + \frac{B_3^{(s)}(t)}{r^3} \sin 3\varphi + \dots \right), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_z &= \zeta_z(z) \left( \frac{C_2^{(c)}(t)}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{C_3^{(c)}(t)}{r^3} \cos 3\varphi + \right. \\ &\left. + \frac{C_2^{(s)}(t)}{r^2} \sin 2\varphi + \frac{C_3^{(s)}(t)}{r^3} \sin 3\varphi + \dots \right). \end{aligned}$$

Врахуємо вираз для визначення дивергенції від вектора швидкості  $\mathbf{V}$  у вибраній раніше циліндричній СК

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (rV_z) \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[ V_r + r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial V_z}{\partial z} \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 e^{-\int_0^t \operatorname{div} \mathbf{V} d\tau} \approx \\ &\approx \rho_0 \left( 1 - \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{V} d\tau \right) = \rho(\rho_0, r, \varphi, z, t). \quad (19) \end{aligned}$$

Введемо безрозмірні параметри:

$$\bar{C}_m^{(c)} = \frac{C_m^{(c)}}{R^{m+1}}, \quad \bar{C}_m^{(s)} = \frac{C_m^{(s)}}{R^{m+1}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

$$\bar{P}_A = \frac{P_A}{P_0}, \quad \bar{\rho}_z(\varphi) = \frac{\rho_z(\varphi)}{b},$$

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l}, \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0}{R\omega}, \quad \bar{t} = t\omega,$$

$$\bar{A}_m^{(c)} = \frac{A_m^{(c)}}{R^{m+1}}, \quad \bar{A}_m^{(s)} = \frac{A_m^{(s)}}{R^{m+1}}, \quad \bar{B}_m^{(c)} = \frac{B_m^{(c)}}{R^{m+1}}, \quad \bar{B}_m^{(s)} = \frac{B_m^{(s)}}{R^{m+1}},$$

де  $A_m^{(c)}$ ,  $A_m^{(s)}$ ,  $B_m^{(c)}$ ,  $B_m^{(s)}$ ,  $C_m^{(c)}$ ,  $C_m^{(s)}$  – коефіцієнти апроксимацій для вектора переміщень;  $r$  – радіус-

вектор вибраної точки в середині контрольного об'єму;  $R$  – радіус циліндричного контрольного об'єму;  $V_0$  – швидкість набігаючого повітряного потоку;  $z$  – координата по осі  $Cz$ ;  $l$  – довжина КБС;  $\omega$  – парціальна частота згинальних коливань КБС;  $t$  – час;  $\rho_0$  – початкова густина повітряного потоку,  $P_A$  – початковий тиск повітряного потоку;  $P_0$  – тиск незбуреного потоку;  $\rho_z(\varphi)$  – рівняння контуру аеродинамічного профілю у вибраній циліндричній системі координат;  $b$  – довжина хорди профілю КБС.

Тоді з (19) отримаємо

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 e^{-\int \text{div} V dt} = \rho(\rho_0, r, \varphi, z, t) = \\ &= \rho_0 \left( 2 \frac{\bar{V}_0 R \omega \bar{t}}{\bar{r} R} \cos \varphi - \zeta_r(\bar{z}) \frac{\bar{A}_2^{(c)}(t) R^3}{\bar{r}^3 R^3} \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \zeta_\varphi(\bar{z}) \frac{\bar{B}_2^{(c)}(t) R^3}{\bar{r}^3 R^3} \sin 2\varphi \right) = \\ &= 2 \frac{\bar{V}_0 \bar{t}}{\bar{r}} \cos \varphi - \zeta_r(\bar{z}) \frac{\bar{A}_2^{(c)}(t)}{\bar{r}^3} \cos 2\varphi - \\ &\quad - 2 \zeta_\varphi(\bar{z}) \frac{\bar{B}_2^{(c)}(t)}{\bar{r}^3} \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

де  $\zeta_r(z)$ ,  $\zeta_\varphi(z)$ ,  $\zeta_z(z)$  – безрозмірні коректуючі функції.

Після перепозначення безрозмірних параметрів  $\bar{A}_j^{(c)}(t)$ , ...,  $\bar{p}$ , ... на  $A_j^{(c)}(t)$ , ...,  $p$ , ... отримаємо вираз для густини набігаючого повітряного потоку в безрозмірному вигляді

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 - 2\rho_0 \frac{V_0}{r} t \cos \varphi + \frac{A_2^{(c)}(t)}{r^3} \rho_0 \zeta_r(z) \cos 2\varphi + \\ &\quad + 2 \frac{B_2^{(c)}(t)}{r^3} \rho_0 \zeta_\varphi(z) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Отже, компоненти, що входять у вирази (10) і (15), визначаються за допомогою таких формул:

$$\begin{aligned} p_{z,y}^* &= h(z) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left( \rho_0 - 2\rho_0 \frac{V_0}{r} t \cos \varphi + \frac{A_2^{(c)}(t)}{r^3} \rho_0 \zeta_r(z) \cos 2\varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{B_2^{(c)}(t)}{r^3} \rho_0 \zeta_\varphi(z) \sin 2\varphi \right) \times \\ &\times \left( \frac{P_A}{\rho_A} + \frac{1}{2} \frac{n-1}{2} \frac{\rho_0}{P_0} (R\omega)^2 [V_0^2 \cos^2 2\varphi + 4c_1^2(t) \psi_1^2(z)] \right) \times \\ &\times (\rho'_z(\varphi) \cos \varphi - \rho_z(\varphi) \sin \varphi) d\varphi dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{z,x}^* &= h(z) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left( \rho_0 - 2\rho_0 \frac{V_0}{r} t \cos \varphi + \frac{A_2^{(c)}(t)}{r^3} \rho_0 \zeta_r(z) \cos 2\varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{B_2^{(c)}(t)}{r^3} \rho_0 \zeta_\varphi(z) \sin 2\varphi \right) \times \\ &\times \left( \frac{P_A}{\rho_A} + \frac{1}{2} \frac{n-1}{2} \frac{\rho_0}{P_0} (R\omega)^2 [V_0^2 \cos^2 2\varphi + 4c_1^2(t) \psi_1^2(z)] \right) \times \\ &\times (\rho'_z(\varphi) \sin \varphi - \rho_z(\varphi) \cos \varphi) d\varphi dz, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} m_{z,z}^* &= -h^2(z) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left( \rho_0 - 2\rho_0 \frac{V_0}{r} t \cos \varphi + \frac{A_2^{(c)}(t)}{r^3} \rho_0 \zeta_r(z) \cos 2\varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{B_2^{(c)}(t)}{r^3} \rho_0 \zeta_\varphi(z) \sin 2\varphi \right) \times \\ &\times \left( \frac{P_A}{\rho_A} + \frac{1}{2} \frac{n-1}{2} \frac{\rho_0}{P_0} (R\omega)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times [V_0^2 \cos^2 2\varphi + 4c_1^2(t) \psi_1^2(z)] \right) \times \\ &\times \rho(\varphi) (\rho'_z(\varphi) \cos 2\varphi) \rho(\varphi) d\varphi dz. \end{aligned}$$

### Моделювання процесу обтікання

Для математичного моделювання конкретної конструктивної схеми балкової системи та розрахунку зовнішніх навантажень від дії набігаючого повітряного потоку, як профіль поперечного перерізу КБС розглядатимемо симетричний аеродинамічний профіль NASA 0012 одиначної довжини (рис. 3). Даний профіль вибрано для наочності та знання точного аналітичного виразу кривої, що його описує:

$$\begin{aligned} y &= \frac{t}{2} (0,2969\sqrt{x} - 0,126x - \\ &\quad - 0,3561x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4). \end{aligned} \quad (22)$$

При  $t = 0,12$  дана крива точно повторює форму профілю NASA 0012. Для подальшого моделювання зобразимо рівняння контуру поперечного перерізу КБС в циліндричній СК, сумістивши при цьому центр мас профілю поперечного перерізу з початком вибраної циліндричної СК (рис 4).

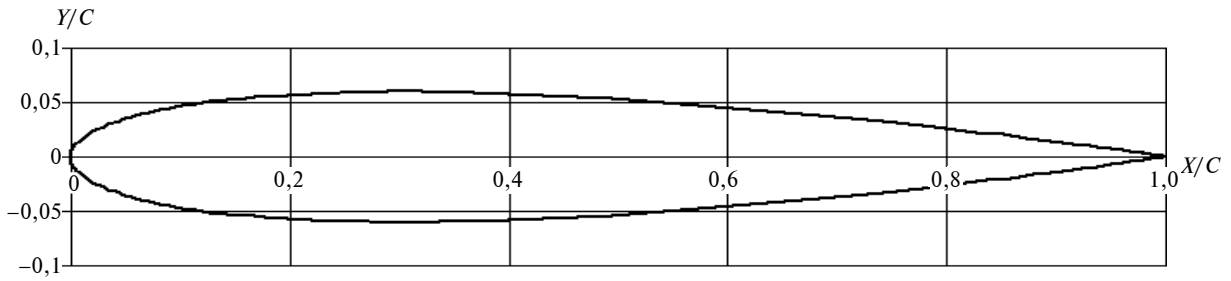


Рис. 3. Профіль поперечного перерізу КБС NASA 0012

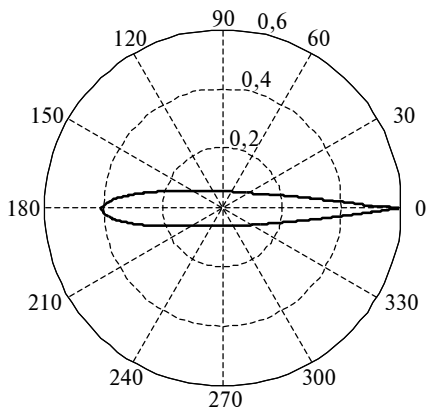


Рис. 4. Профіль поперечного перерізу КБС у циліндричній СК

Для розрахунку складових зовнішнього навантаження, що виникає від дії набігаючого повітряного потоку на КБС, скористаємося формулами (10),(15),(21).

На рис. 5 (а, б, в) і 6 (а, б) наведено результати математичного моделювання силових характеристик, що діють з боку повітряного потоку на поверхню КБС. Ці результати у вигляді графіків відображають зміну зовнішніх навантажень при зміні швидкості набігаючого повітряного потоку та зміні його кута атаки, в тому числі за рахунок деформування КБС.

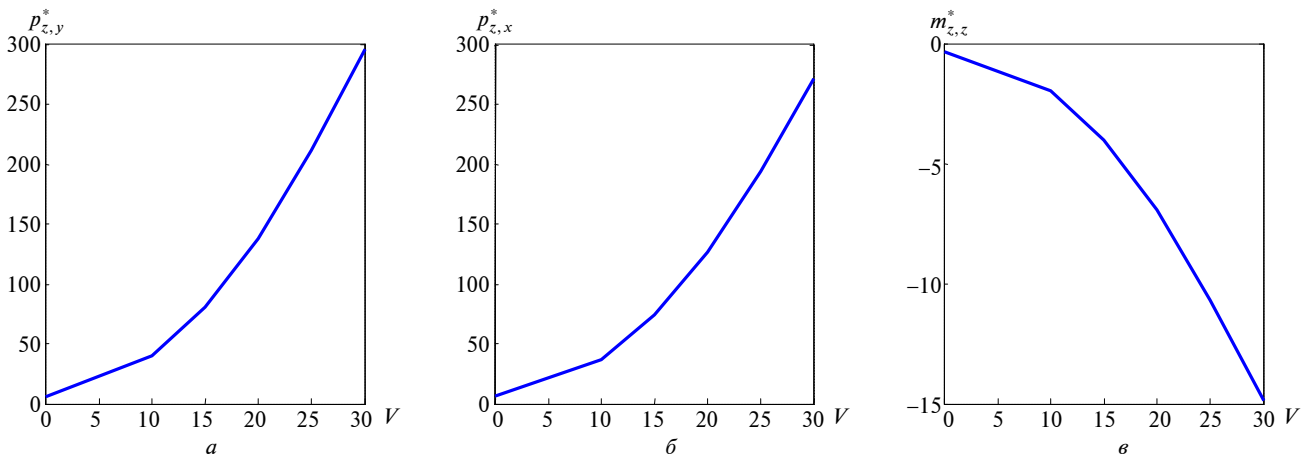


Рис. 5. Силові навантаження  $p_{z,x}^*$ ,  $p_{z,y}^*$ ,  $m_{z,z}^*$

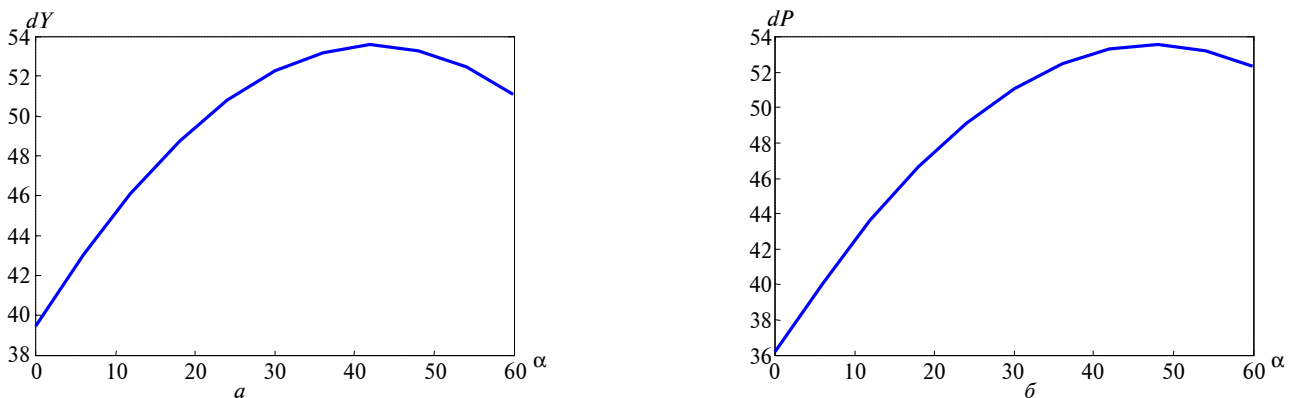


Рис. 6. Силові навантаження  $dY$ ,  $dP$

## Висновки

Запропонований новий (уточнений) підхід дає можливість визначати силові фактори, які діють на поверхню КБС при безвідривному і плавному її обтіканні повітряним потоком. Для розв'язання цієї задачі використовувався підхід Лагранжа, уточнений вираз для інтеграла Бернуллі і деякі кінематичні характеристики, що описують деформування КБС.

Одержаний уточнений вираз для визначення розподілених по контуру поперечного перерізу КБС навантажень враховує параметри се-

редовища, висоту, на якій відбувається рух КБС, і, що важливо, процес її деформування.

На основі проведених у статті досліджень можна оцінювати зміну кута атаки при деформуванні КБС. Отримані вирази дають змогу визначати головний вектор і головний момент від дії сил тиску, викликаних набігаючим повітряним потоком.

У подальших працях автора будуть проведені дослідження щодо розв'язання систем диференціальних рівнянь, які описують динаміку взаємодії КБС і набігаючого повітряного потоку.

А.П. Мариношенко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК ОТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛОЧНОЙ СИСТЕМЫ И НАБЕГАЮЩЕГО ВОЗДУШНОГО ПОТОКА

Дана постановка и метод решения задачи, содержание которой отображается в заголовке. Сформулированы основные соотношения для определения распределенной внешней аэродинамической нагрузки на консольную балочную систему от действия набегающего воздушного потока. С использованием этих соотношений получены формулы для определения давления воздушного потока на поверхность деформируемой консольной балочной системы. Выведены формулы для расчета приведенных к центру масс аэродинамического профиля главного вектора и главного момента от действия набегающего воздушного потока.

O.P. Marynoshenko

LOADINGS CALCULATION FROM THE INTERACTION OF A CANTILEVER BEAM SYSTEM WITH AN INCOMING AIRFLOW

The objective of the paper under scrutiny is to calculate the loadings from the interaction of a cantilever beam system with an incoming airflow. To achieve this, the basic ratios for the calculation of the distributed external aerodynamic loading on the cantilever beam system from the interaction with the incoming airflow are formulated. Using these ratios, the formulas for the determination of the airflow pressure on the deformed cantilever beam system are proposed. Finally, the formulas for the calculation of the basic vector's centralized air masses of the airfoil profile arbitrary sections and the principal moment of the interaction of the cantilever beam systems with the airflow are obtained.

1. *Бесплингофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л.* Аэроупругость. — М.: Наука, 1958. — 968 с.
2. *Келдыш М.В.* Избранные труды. Механика. — М.: Наука, 1985. — 568 с.
3. *Scanlan R.H., Tomko J.J.* Airfoil and Bridge Deck Flutter Derivatives // *J. of Engineering Mechanics, ASCE.* — 1971. — **97**. — P. 1717–1737.
4. *Каюк Я.Ф., Мариношенко О.П.* Визначення величин тиску повітряного потоку на поверхню крила з врахуванням

його деформованості // Сучасні проблеми аналітичної механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **1**, № 2. — С. 90–105.

5. *Каюк Я.Ф., Мариношенко О.П.* Метод побудови характеристик напруженого і деформованого стану крил літаків // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2004. — № 3. — С. 83–89.

Рекомендована Радою НАЦ критичних технологій навігаційного приладобудування НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції  
5 березня 2008 року