УДК 517.9

Н.В. Задоянчук, П.О. Касьянов

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ II ПОРЯДКУ З НЕКОЕРЦИТИВНИМИ W_{λ_0}-ПСЕВДОМОНОТОННИМИ ВІДОБРАЖЕННЯМИ

Вступ

Диференціально-операторні рівняння, включення і еволюційні варіаційні нерівності, що зводяться до них, вивчаються досить інтенсивно багатьма авторами [1—16]. За аналогією з [4, 13] еволюційні рівняння II порядку зводяться до диференціально-операторних рівнянь I порядку, а потім з використанням відомих методів для них доводиться розв'язність. У праці [4] такі об'єкти розглядались для монотонних відображень, у [12, 13] — для відображень із напівобмеженою варіацією. Останні розробки з даної тематики стосуються диференціально-операторних рівнянь із глобально обмеженою по фазовій змінній немонотонною нелінійністю [15, 16]. Слід зазначити, що така задача є коерцитивною.

У даній статті розглядаються еволюційні рівняння II порядку з некоерцитивними W_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями. Наша задача полягає в тому, щоб перенести і розвинути некоерцитивну теорію для еволюційних рівнянь II порядку з W_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями, а також одержати нові результати про розв'язність.

Постановка задачі

Нехай V_i, $i = 1,2$, — рефлексивні банахові простори, H — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, ототожнений із спряженим простором H^*, $\{V_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ — ланцюжок гільбертових просторів, таких, що $\forall\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ $V_{\sigma_1} \subset V_{\sigma_2}$, причому вкладення неперервне та щільне. Нехай $\sigma_0 > 0$. Тоді маємо ланцюжок неперервних та щільних вкладень $\forall\sigma \geq \sigma_0$

$$V_\sigma \subset V_i \subset H \subset V_i^* \subset V_\sigma^*,$$

де V_i^* — спряжений простір до V_i; V_σ^* — простір, спряжений до V_σ відносно $(\cdot,\cdot)$. Нехай також $V = V_1 \cap V_2$.

Введемо позначення $S = [0,T]$ — скінченний інтервал часу. Тоді матимемо

$$X_i = L_{p_0}(S;H) \cap L_{p_i}(S;V_i),$$

$$X_i^* = L_{q_0}(S;H) + L_{q_i}(S;V_i^*),$$

$$X = L_{p_0}(S;H) \cap L_{p_1}(S;V_1) \cap L_{p_2}(S;V_2),$$

$$X_\sigma = L_{p_0}(S;H) \cap L_{\max\{p_1,p_2\}}(S;V_\sigma),$$

$$X^* = L_{q_0}(S;H) + L_{q_1}(S;V_1^*) + L_{q_2}(S;V_2^*),$$

$$X_\sigma^* = L_{q_0}(S;H) + L_{\min\{q_1,q_2\}}(S;V_\sigma^*),$$

де $\dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{q_0} = \dfrac{1}{p_i} + \dfrac{1}{q_i} = 1$; $1 < p_i < \infty$; $p_i \leq p_0 < < \infty$, $i = 1,2$.

Лінійний простір $W = \{y \in X \mid y' \in X^*\}$ (відповідно, $W_\sigma = \{y \in X \mid y' \in X_\sigma^*\}$) є рефлексивним банаховим простором відносно норми $\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*}$ (відповідно, $\|y\|_{W_\sigma} = \|y\|_X + \|y'\|_{X_\sigma^*}$), де y' — похідна від елемента $y \in X$ в розумінні простору скалярних розподілів $D^*(S,V_\sigma^*) = L(D(S);V_\sigma^*)$ [4].

Для довільних $v \in X$ та $f \in X^*$ ($f = f_0 + f_1 + f_2$, $f_0 \in L_{q_0}(S;H)$, $f_1 \in L_{q_1}(S;V_1^*)$, $f_2 \in L_{q_2}(S;V_2^*)$) розглянемо співвідношення

$$\langle f,v\rangle_X = \int_S (f_0(t),v(t))dt + \int_S \langle f_1(t),v(t)\rangle_{V_1} dt + \int_S \langle f_2(t),v(t)\rangle_{V_2} dt = \int_S (f(t),v(t))dt.$$

Тут $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_i} : V_i^* \times V_i \to R$ — канонічне спарювання, що збігається на $H \times V_i$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ в H.

Розглянемо таку задачу:

$$\begin{cases} u'' + Au' + Bu + Cu = f, \\ u(0) = a_0, u'(0) = a_1, u \in C(S;V), u' \in X, \end{cases} \quad (1)$$

де $a_0 \in V$, $a_1 \in H$ і $f \in X^*$ – довільні фіксовані елементи. Метою статті є доведення розв'язності даної проблеми методом Фаедо–Гальоркіна.

Основні означення

***Означення* 1.** Оператор $A : X \to X^*$ називається λ_0-псевдомонотонним на W (на W_σ), якщо з довільної послідовності $\{y_n\}_{n\ge1} \subset W(W_\sigma)$, такої, що $y_n \to y$ слабко в X, $y_n' \to y'$ слабко в $X^*(X_\sigma^*)$, $Ay_n \to d$ слабко в X^* та $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Ay_n, y_n - y\rangle_X \le 0$ можна виділити таку підпослідовність $\{y_{n_k}\}_{k\ge1}$ послідовності $\{y_n\}_{n\ge1}$, що

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \langle Ay_{n_k}, y_{n_k} - w\rangle_X \ge \langle Ay, y - w\rangle_X \quad \forall w \in X.$$

Лема 1 [14]. Нехай $A, B : X \to X^*$ – λ_0-псевдомонотонні на W (на W_σ) оператори. Нехай також один з операторів обмежений. Тоді оператор $F = A + B$ ($F(y) = A(y) + B(y)$, $y \in X$) є λ_0-псевдомонотонним на W (на W_σ).

***Означення* 2.** Оператор $A : X \to X^*$ називається коерцитивним, якщо існує визначена на $[0,\infty)$ дійсна функція γ з $\lim_{s\to\infty}\gamma(s) = +\infty$, така, що

$$\langle Au, u\rangle_X \ge \gamma(\|u\|_X)\|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

***Означення* 3.** Оператор $A : X \to X^*$ називається оператором типу Вольтера, якщо для довільного $t \in S$ з рівності $u(s) = v(s)$ для майже всіх (м.в.) $s \in [0,t]$ ($u, v \in X$), випливає, що $(Au)(s) = (Av)(s)$ для майже всіх $s \in [0,t]$.

***Означення* 4.** Оператор $A : X \to X^*$ називається демінеперервним, якщо з $u_n \to u$ в X випливає, що Au_n слабко збігається до Au в X^*.

Метод Фаедо–Гальоркіна

Нехай $\{h_i\}_{i\ge1}$ – повна система лінійно незалежних елементів із V_σ для деякого $\sigma \ge \sigma_0$ і нехай H_n – лінійна оболонка множини $\{h_i\}_{i=1}^n$, наділена скалярним добутком, індукованим із H. Згідно з попередніми міркуваннями, H_n^* – спряжений до H_n простір, ототожнений із самим H_n; $X_n := L_{p_0}(S; H_n)$, $X_n^* = L_{q_0}(S; H_n)$ – спряжений до X_n простір відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X_n} = \langle\cdot,\cdot\rangle_X|_{X_n^*\times X_n}$, $W_n := \{y \in X_n \mid y' \in \in X_n^*\}$, де похідну y' від елемента $y \in X_n$ беремо в розумінні простору розподілів $D^*(S, H_n)$.

Для довільного $n \ge 1$ нехай $I_n \in L(X_n; X)$ – канонічне вкладення X_n в X (тобто $I_n x = x$ $\forall x \in X_n$), I_n^* – спряжений оператор до I_n.

Позначимо P_n оператор ортогонального проектування з H в H_n. Припустимо, що для деяких $\sigma \ge \sigma_0$ даний оператор задовольняє такі умови:

$$\|P_n\|_{L(H;H)} \le 1,\ \|P_n\|_{L(V_\sigma;V_\sigma)} \le 1,\ \|P_n\|_{L(V_\sigma^*;V_\sigma^*)} \le 1. \quad (2)$$

Зауважимо, що як повну систему векторів $\{h_j\}_{j\ge1}$, що задовольняє (2), можемо взяти так званий "спеціальний" базис для пари $(V_\sigma; H)$ (детальніше див. [6]). Зауважимо також, що для всіх $n \ge 1$ і $f \in X^*$ маємо $(I_n^* f)(t) = P_n f(t)$ для м.в. $t \in S$.

Розв'язки задачі (1) будемо "наближати" розв'язками такої задачі:

$$\begin{cases} u_n'' + A_n u_n' + B_n u_n + C_n u_n = f_n, \\ u_n(0) = a_{0n}, \quad u_n'(0) = a_{1n}, \\ u_n \in C(S; H_n), \quad u_n' \in X_n, \end{cases} \quad (3)$$

де $A_n := I_n^* A I_n : X_n \to X_n^*$; $B_n := I_n^* B I_n : X_n \to X_n^*$; $C_n := I_n^* C I_n : X_n \to X_n^*$; $f_n := I_n^* f \in X_n^*$; $\{a_{0n}\}_{n\ge1}$: $a_{0n} \in H_n$ – довільна послідовність, що збігається до a_0 в V; $\{a_{1n}\}_{n\ge1}$: $a_{1n} \in H_n$ – довільна послідовність, що збігається до a_1 в H.

Основний результат

Теорема 1. Нехай V – компактно вкладений в V_2 оператор і для деяких $\sigma \ge \sigma_0$ виконуються умови (2). Нехай також p_0, p_1, p_2 і $\sigma_1 \ge 0$ такі, що $X \subset L_2(S;V_{\sigma_1})$. Нехай, далі, $A: X_1 \to X_1^*$ — λ_0-псевдомонотонний на W_σ, обмежений оператор Вольтера, такий, що $A: C(S;V_\sigma) \to X^*$ – демінеперервний; $B: L_2(S;V_{\sigma_1}) \to$ $\to L_2(S;V_{\sigma_1}^*)$ — оператор з такою властивістю:

$$(Bu)(t) = B_0 u(t) \;\; \forall u \in X \text{ для м.в. } t \in S,$$

де $B_0 : V_{\sigma_1} \to V_{\sigma_1}^*$ — лінійний, обмежений, самоспряжений, монотонний оператор; $C: X_2 \to$ $\to X_2^*$ — демінеперервний оператор Вольтера, що задовольняє таку умову:

$$\exists c_1 \ge 0: \quad \|Cy\|_{X_2^*} \le c_1(1 + \|y\|_{X_2}^\alpha) \;\; \forall y \in X_2,$$

де $\alpha \ge 1$.

Нехай, крім того, виконується умова

$$\exists \lambda_1 > 0: \quad \frac{\langle A(y), y\rangle_X}{\|y\|_X} + \frac{\lambda_1 \|y\|^2_{L_2(S;H)}}{\|y\|_X} - \frac{L^\alpha c\|y\|_{X_2}^{\alpha+1}}{\|y\|_X} \to +\infty \text{ при } \|y\|_X \to +\infty, \tag{4}$$

де $L = 2T, c = \dfrac{c_1}{2}$. Тоді для довільних $a_0 \in V$, $a_1 \in H$ і $f \in X^*$ існує принаймні один розв'язок задачі (1) $u \in X$, причому $u' \in W$ і знайдеться така підпослідовність $\{u_{n_k}\}$ послідовності $\{u_n\}_{n\ge1}$, для якої мають місце властивості

$$u''_{n_k} \to u'' \text{ слабко в } X^*, u'_{n_k} \to u' \text{ слабко в } X,$$

$$u'_{n_k} \to u' \text{ в } Y, \;\; u_{n_k} \to u \text{ в } C(S;H)$$

та

$$u_{n_k} \to u \text{ слабко в } X,$$

де $\{u_n\}_{n\ge1}$ — послідовність розв'язків (3).

Доведення. За аналогією з [12, 13] зведемо еволюційне рівняння з (1) до рівняння I порядку. Нехай $R: X \to X(Y \to Y, C(S;V_\sigma) \to$ $\to C^1(S;V_\sigma))$ — оператор Вольтера, визначений співвідношенням

$$(Rv)(t) = a_0 + \int_0^t v(s)ds \;\; \forall v \in X, \;\; \forall t \in S,$$

де R є ліпшиц-неперервним оператором з X в X (з Y в Y, з $C(S;V_\sigma)$ в $C(S;V_\sigma)$). Якщо u — розв'язок задачі (1): $u' \in W$, то $v = u'$ буде розв'язком задачі

$$\begin{cases} v' + (A + B\circ R + C\circ R)v = f, \\ v(0) = a_1, \; v \in W. \end{cases} \tag{5}$$

Навпаки, якщо v — розв'язок задачі (5), то $u = Rv$ є розв'язком задачі (1), таким, що $u' \in W \subset X$.

Розглянемо оператор Вольтера $F := A +$ $+ B\circ R + C\circ R : X \to X^*$ ($I: X \to X \subset X^*$ — тотожне відображення). Використавши результати [14] і лему 1, достатньо перевірити такі умови:

α_1) оператор $F: X \to X^*$ — λ_0-псевдомонотонний на W_σ і обмежений;

α_2) оператор $F: C(S;V_\sigma) \to X^*$ — демінеперервний;

α_3) для деякого фіксованого $\lambda \ge \lambda_1$ оператор $F + \lambda I: X \to X^*$ – коерцитивний.

Щоб перевірити виконання умови α_1, насамперед доведемо, що якщо $C: X_2 \to X_2^*$ — демінеперервний оператор, то $(C\circ R): X \to X^*$ — λ_0-псевдомонотонний на W_σ оператор.

Отже, нехай $y_n \to y$ слабко в X, $y'_n \to y'$ слабко в X_σ^* і $(C\circ R)(y_n) \to d$ слабко в X^* і виконується співвідношення

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle C\circ R(y_n), y_n - y\rangle_X \le 0.$$

Спочатку покажемо, що $Ry_n \to Ry$ слабко в X, тобто $\langle Ry_n - Ry, f\rangle_X \to 0$ при $n \to \infty$ $\forall f \in X^*$. Покладемо $F(t) = \int_T^t f(s)ds, \; s \in S$. Доведемо, що $F \in X^*$. Для всіх $t \in S$ покладемо $F_i(t) = \int_T^t f_i(s)ds, \; i = \overline{1,3}$, де $f_1 \in L_{q_1}(S;V_1^*)$, $f_2 \in L_{q_2}(S;V_2^*)$, $f_3 \in L_{q_0}(S;H)$ і такі, що $f =$ $= f_1 + f_2 + f_3$. Розглянемо

$$F_i(t)-F_i(s)=\int_s^t f_i(\tau)d\tau,\ 0<s<t\le T.$$

Проаналізуємо спочатку окремо F_1. Маємо

$$\|F_1(s)-F_1(t)\|_{V_1^*}=\left\|\int_s^t f_i(\tau)d\tau\right\|_{V_1^*}\le\int_s^t\|f_i(\tau)\|_{V_1^*}d\tau\le$$

$$\le\left(\int_0^T\|f_i(\tau)\|_{V_1^*}^{q_1}d\tau\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\int_s^t 1d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}=$$

$$=|t-s|^{\frac{1}{p_1}}\|f_1\|_{L_{q_1}(S;V_1^*)}.$$

Отже, $F_1\in C(S;V_1^*)$. Аналогічно маємо, що $F_2\in C(S;V_2^*)$, $F_3\in C(S;H)$. В свою чергу простори $C(S;V_1^*), C(S;V_2^*), C(S;H)$ вкладені неперервно у відповідні простори $L_{q_1}(S;V_1^*), L_{q_2}(S;V_2^*)$, $L_{q_0}(S;H)$. Тому $\hat{F}=F_1+F_2+F_3\in X^*$. Далі, згідно з визначенням канонічного спарювання в X, маємо, що

$$\langle Ry_n-Ry,f\rangle_X=\int_0^T(Ry_n(\tau)-Ry(\tau),f(\tau))d\tau=$$

$$=(Ry_n(T)-Ry(T),\hat{F}(T))-(Ry_n(0)-Ry(0),\hat{F}(0))-$$

$$-\int_0^T(y_n(\tau)-y(\tau),\hat{F}(\tau))=-\langle\hat{F},y_n-y\rangle_X\to 0$$

$$\text{при } n\to\infty,$$

оскільки $\hat{F}\in X^*$. Отже, $Ry_n\to Ry$ слабко в X при $n\to\infty$.

Далі покажемо, що $Ry_n\to Ry$ в X_2 при $n\to\infty$. Доведення проведемо в два етапи.

1. Спочатку доведемо, що $Ry_n\to Ry$ в $L_{\min\{p_1,p_2\}}(S;V_2)$ при $n\to\infty$. Відомо, що $L_{p_1}(S;V_1)\subset L_{\min\{p_1,p_2\}}(S;V_1)$ та $L_{p_2}(S;V_2)\subset\subset L_{\min\{p_1,p_2\}}(S;V_2)$, а $X\subset L_{\min\{p_1,p_2\}}(S;V_1)\cap\cap L_{\min\{p_1,p_2\}}(S;V_2)$. Покладемо $p:=\min\{p_1,p_2\}$ і доведемо, що $L_p(S;V_1)\cap L_p(S;V_2)=L_p(S;V)$.

Нехай $f\in L_p(S;V_1)\cap L_p(S;V_2)$. Маємо, що $\forall h_1\in\in V_1^*$ $(h_1,f(\cdot))$ – вимірна і $\forall h_2\in V_2^*$ $(h_2,f(\cdot))$ – теж вимірна; тоді $(h_1+h_2,f(\cdot))$ – вимірна, а тому $f\in(S\to V)$ – вимірна за Бохнером. Далі, оскільки $f\in L_p(S;V_1)$ і $f\in L_p(S;V_2)$, то $\int_S\|f(\tau)\|_{V_1}^p d\tau<+\infty$ і $\int_S\|f(\tau)\|_{V_2}^p d\tau<+\infty$. Звідси маємо

$$\int_S(\|f(\tau)\|_{V_1}+\|f(\tau)\|_{V_2})^p d\tau\le$$

$$\le\int_S(\|f(\tau)\|_{V_1}^p+\|f(\tau)\|_{V_2}^p)2^{p-1}d\tau<+\infty.$$

Тому $f\in L_p(S;V)$. Далі, $X_\sigma^*\subset L_{\min\{q_0,q_1,q_2\}}(S;V_\sigma^*)=$ $=L_{\tilde{q}}(S;V_\sigma^*)$, оскільки $H\subset V_\sigma^*$, де $\tilde{q}=$ $=\min\{q_0,q_1,q_2\}$. Тоді послідовність $\{y_n\}_{n\ge1}$ обмежена в просторі $W_1=\{y\in L_p(S;V)\,|\,y'\in\in L_{\tilde{q}}(S;V_\sigma^*)\}$. Тоді, за лемою про компактність ($V\subset V_2$ компактно і $V_2\subset V_\sigma^*$), маємо, що $W_1\subset L_p(S;V_2)$ компактно, а тому $y_n\to y$ в $L_p(S;V_2)$. Оскільки оператор R – ліпшицевий, то $Ry_n\to Ry$ в $L_p(S;V_2)$.

2. Доведемо, що $\{Ry_n\}_{n\ge1}$ обмежена в $C(S;V_2)$. Розглянемо $Ry_n(t)-Ry_n(s)=\int_s^t y_n(\tau)d\tau$, $0<s<t\le T$, тобто

$$\|Ry_n(t)-Ry_n(s)\|_{V_2}=\left\|\int_s^t y_n(\tau)d\tau\right\|_{V_2}\le$$

$$\le\int_s^t\|y_n(\tau)\|_{V_2}d\tau\le\|y_n\|_{L_{p_2}(S;V_2)}|t-s|^{\frac{1}{q_2}}\le$$

$$\le\|y_n\|_X|t-s|^{\frac{1}{q_2}}.$$

Звідси, зокрема, отримаємо

$$\exists M>0:\ \|Ry_n(t)\|_{V_2}\le\|Ry_n(0)\|_{V_2}+$$

$$+\|Ry_n(t)-Ry_n(0)\|_{V_2}=\|a_0\|_{V_2}+\|\int_0^t y_n(\tau)d\tau\|_{V_2}\le$$

$$\le \| a_0 \|_V + \| y_n \|_X \, T^{\frac{1}{q_2}} \le M.$$

Тому послідовність $\{Ry_n\}_{n\ge1}$ обмежена в $C(S;V_2)$.

Доведемо, що $Ry_n \to Ry$ в $L_{p_2}(S;V_2)$ при $n\to\infty$. Для цього застосуємо метод від супротивного. Нехай існує $\{Ry_m\}_{m\ge1}$ – деяка підпослідовність послідовності $\{Ry_n\}_{n\ge1}$. Нехай $\exists \varepsilon^* > 0$, таке, що $\| Ry_m - Ry \|_{L_{p_2}} \ge \varepsilon^* \ \forall m \ge 1$. Далі маємо, що якщо $Ry_m \to Ry$ в $L_p(S;V_2)$ при $m\to\infty$, то $\int_S \| Ry_m(\tau) - Ry(\tau) \|_{V_2}^p d\tau \to 0$ при $m\to\infty$. А це означає, що існує деяка підпослідовність $\{y_l\}_{l\ge1}$ послідовності $\{y_m\}_{m\ge1}$, така, що $\| Ry_l(\tau) - Ry(\tau) \|_{V_2} \to 0$ при $l\to\infty$ для м.в. $\tau\in S$. Позначимо $\varphi_l(\tau) = Ry_l(\tau) - Ry(\tau)$ і матимемо

$$\exists M_1 > 0: \quad \forall l \quad |\varphi_l(\tau)| \le M_1, \quad \tau \in S.$$

Отримуємо, що $\varphi_l^{p_2}(\tau) \to 0$ при $l\to\infty$ і $|\varphi_l^{p_2}(\tau)| \le M_1^{p_2}$. За теоремою Лебега про мажоровану збіжність, маємо, що $\varphi_l^{p_2} \to 0$ в $L_1(S)$, що те ж саме, що $\| Ry_l - Ry \|_{L_{p_2}(S;V_2)}^{p_2} = \int_S \| Ry_l(\tau) - Ry(\tau) \|_{V_2}^{p_2} d\tau \to 0$. Ми прийшли до протиріччя. Отже, $Ry_n \to Ry$ в $L_{p_2}(S;V_2)$ при $n\to\infty$. Аналогічно маємо, що $Ry_n \to Ry$ в $L_{p_0}(S;H)$, оскільки $V\subset V_2$ компактно, а $V_2 \subset H$ неперервно, то $V\subset H$ компактно. Звідси отримуємо, що $Ry_n \to Ry$ в X_2 при $n\to\infty$.

Оскільки $C: X_2 \to X_2^*$ – демінеперервний оператор, то $C\circ Ry_n \to C\circ Ry$ слабко в X_2^*. А це означає, що $\forall \omega \in X_2$ виконується співвідношення

$$\langle C\circ R(y_n), y_n - \omega\rangle_X \to \langle C\circ R(y), y-\omega\rangle_X.$$

Отже, оператор $C\circ R: X\to X^*$ – λ_0-псевдомонотонний на W_σ.

Доведемо, що оператор $B\circ R: X\to X^*$ монотонний. Для $v,w\in X$ маємо

$$\langle B\circ Rv - B\circ Rw, v-w\rangle =$$

$$= \int_S (B_0(Rv-Rw)(t), (Rv-Rw)'(t))dt =$$

$$= \frac{1}{2}(B_0(Rv-Rw)(T), (Rv-Rw)(T)) \ge 0.$$

Згідно з лемою 1, λ_0-псевдомонотонністю на W_σ оператора $C\circ R: X\to X^*$ та монотонністю і неперервністю у відповідних топологіях операторів $\lambda I: X\to X^*$ і $B\circ R: X\to X^*$ випливає, що оператор $F: X\to X^*$ – λ_0-псевдомонотонний.

Перевіримо умову α_2. Доведемо спочатку, що оператор $B\circ R: C(S;V_\sigma)\to X^*$ демінеперервний.

Відомо, що B_0 обмежений, тобто для всіх $u\in V_{\sigma_1}$

$$\exists K_1 > 0: \quad \| B_0 u\|_{V_{\sigma_1}^*} \le K_1 \| u \|_{V_\sigma}.$$

Для $v\in L_2(S;V_{\sigma_1})$ в силу обмеженості B_0 маємо

$$\| Bv \|_{L_2(S;V_\sigma^*)} = \left(\int_S \| C_0 v(t) \|_{V_{\sigma_1}^*}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le K_1 \left(\int_S \| v(t) \|_{V_{\sigma_1}}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = K_1 \| v \|_{L_2(S;V_{\sigma_1})}.$$

Звідси випливає неперервність, а отже, і демінеперервність оператора $B: L_2(S;V_{\sigma_1}) \to L_2(S;V_{\sigma_1}^*)$. Звідси і з ліпшицевості оператора $R: C(S;V_\sigma)\to C(S;V_\sigma)$ маємо демінеперервність оператора $B\circ R: C(S;V_\sigma) \to L_2(S;V_{\sigma_1}^*)$. Оскільки $L_2(S;V_{\sigma_1}^*) \subset X^*$, то маємо демінеперервність оператора $B\circ R: C(S;V_\sigma)\to X^*$.

Доведемо демінеперервність оператора $C\circ R: C(S;V_\sigma)\to X^*$. Оскільки оператор $R: C(S;V_\sigma)\to C(S;V_\sigma)$ ліпшицевий, а отже, неперервний, а оператор $C: X_2\to X_2^*$ демінеперервний, то з неперервного вкладення просторів $C(S;V_\sigma)$ в X_2 і X_2^* в X^* маємо демінеперервність оператора $C \circ R : C(S;V_\sigma) \to X^*$.

Таким чином, маємо демінеперервність оператора $F : C(S;V_\sigma) \to X^*$.

Перевіримо виконання умови α_3, а саме доведемо, що виконується співвідношення

$$\frac{\langle F(y)+\lambda I(y), y\rangle_X}{\|y\|_X} \to +\infty \text{ при } \|y\|_X \to +\infty.$$

Взявши до уваги визначення оператора F, отримаємо

$$\frac{\langle F(y)+\lambda I(y), y\rangle_X}{\|y\|_X} = \frac{\langle A(y), y\rangle_X}{\|y\|_X} + \frac{\langle \lambda I(y), y\rangle_X}{\|y\|_X} +$$

$$+\frac{\langle B\circ R(y), y\rangle_X}{\|y\|_X} + \frac{\langle C\circ R(y), y\rangle_X}{\|y\|_X}. \qquad (6)$$

Розглянемо третій доданок. З визначення оператора R маємо

$$\langle B\circ Rv, v\rangle = \int_S (B_0(Rv)(t), (Rv)'(t))dt =$$

$$=\frac{1}{2}((B_0(Rv)(T), (Rv)(T)) - (B_0a_0, a_0)) \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}(B_0a_0, a_0).$$

Розглянемо останній доданок. Спочатку знайдемо константу Ліпшиця для оператора $R : X_2 \to X_2^*$. Відзначимо, що норма в просторі X_2 визначається так:

$$\|\cdot\|_{X_2} = \|\cdot\|_{L_{p_2}(S;V_2)} + \|\cdot\|_{L_{p_0}(S;H)}.$$

Розглянемо $Ry - R\bar{0} = \int_0^t y(s)ds.$ Далі матимемо

$$\|Ry - R\bar{0}\|_{X_2} = \|\int_0^t y(s)ds\|_{X_2} = \|\int_0^t y(s)ds\|_{L_{p_2}(S;V_2)} +$$

$$+\|\int_0^t y(s)ds\|_{L_{p_0}(S;H)} = \left(\int_0^T \|\int_0^t y(s)ds\|_{V_2}^{p_2} dt\right)^{\frac{1}{p_2}} +$$

$$+\left(\int_0^T \|\int_0^t y(s)ds\|_H^{p_0} dt\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \left(\int_0^T \left(\int_0^t \|y(s)ds\|_{V_2}\right)^{p_2} dt\right)^{\frac{1}{p_2}} +$$

$$+\left(\int_0^T \left(\int_0^t \|y(s)ds\|_H\right)^{p_0} dt\right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Скориставшись нерівністю Гельдера, отримаємо

$$\left(\int_0^T \left(\int_0^t \|y(s)ds\|_{V_2}\right)^{p_2} dt\right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T \left(\int_0^t \|y(s)ds\|_H\right)^{p_0} dt\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^T t^{p_2-1}\int_0^t \|y(s)ds\|_{V_2}^{p_2} dsdt\right)^{\frac{1}{p_2}} +$$

$$+\left(\int_0^T t^{p_0-1}\int_0^t \|y(s)ds\|_H^{p_0} dsdt\right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Провівши заміну змінних, дістанемо

$$\left(\int_0^T t^{p_2-1}\int_0^t \|y(s)\|_{V_2}^{p_2} dsdt\right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T t^{p_0-1}\int_0^t \|y(s)\|_H^{p_0} dsdt\right)^{\frac{1}{p_0}} =$$

$$=\left(\int_0^T\int_s^T t^{p_2-1}\|y(s)\|_{V_2}^{p_2} dtds\right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T\int_s^T t^{p_0-1}\|y(s)\|_H^{p_0} dtds\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^T \|y(s)\|_{V_2}^{p_2} dsT^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T \|y(s)\|_H^{p_0} dsT^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} =$$

$$= T\left(\left(\int_0^T \|y(s)\|_{V_2}^{p_2} ds\right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\int_0^T \|y(s)\|_H^{p_0} ds\right)^{\frac{1}{p_0}}\right) =$$

$$= T\left(\|y\|_{L_{p_2}(S;V_2)} + \|y\|_{L_{p_0}(S;H)}\right) = T\|y\|_{X_2}.$$

Отже, T – це стала Ліпшиця для оператора $R : X_2 \to X_2^*$.

Оцінимо останній доданок, скориставшись визначенням і властивостями оператора R, а також умовами на оператор C:

$$\frac{\langle C\circ R(y), y\rangle_X}{\|y\|_X} \geq \frac{-\|C\circ Ry\|_{X_2^*}\|y\|_{X_2}}{\|y\|_X} \geq$$

$$\geq \frac{-c_1(1+\|Ry\|_{X_2}^{\alpha}\|y\|_{X_2})}{\|y\|_X} \geq \frac{-c_1\|y\|_{X_2} - c_1\|y\|_{X_2}\|Ry\|_{X_2}^{\alpha}}{\|y\|_X} \geq$$

$$\geq \frac{-c_1\|y\|_{X_2} - c_1\|y\|_{X_2}(\|Ry - R\bar{0}\|_{X_2} + \|R\bar{0}\|_{X_2})^{\alpha}}{\|y\|_X} \geq$$

$$\geq \frac{-c_1\|y\|_{X_2} - c_1\|y\|_{X_2}(T\|y\|_{X_2} + \|R\bar{0}\|_{X_2})^{\alpha}}{\|y\|_X} \geq$$

$$\geq \frac{-c_1\|y\|_{X_2} - c_1\|y\|_{X_2}(T^{\alpha}\|y\|_{X_2}^{\alpha} + \|R\bar{0}\|_{X_2}^{\alpha})2^{\alpha-1}}{\|y\|_X} =$$

$$= \frac{-2^{\alpha-1}c_1T^{\alpha}\|y\|_{X_2}^{\alpha+1} - c_1\|y\|_{X_2}\|R\bar{0}\|_{X_2}^{\alpha}2^{\alpha-1} - c_1\|y\|_{X_2}}{\|y\|_X} =$$

$$= \frac{-2^{\alpha-1}c_1T^{\alpha}\|y\|_{X_2}^{\alpha+1} - \|y\|_{X_2}(c_1\|R\bar{0}\|_{X_2}^{\alpha}2^{\alpha-1} + c_1)}{\|y\|_X} \geq$$

$$\geq \frac{-2^{\alpha-1}c_1T^{\alpha}\|y\|_{X_2}^{\alpha+1} - \|y\|_X(c_1\|R\bar{0}\|_{X_2}^{\alpha}2^{\alpha-1} + c_1)}{\|y\|_X} =$$

$$= \frac{-2^{\alpha-1}c_1T^{\alpha}\|y\|_{X_2}^{\alpha+1}}{\|y\|_X} - (c_1\|R\bar{0}\|_{X_2}^{\alpha}2^{\alpha-1} + c_1).$$

Внаслідок того, що a_0 і c_1 фіксовані, маємо

$$\frac{-\frac{1}{2}(B_0a_0, a_0)}{\|y\|_X} \to 0 \text{ при } \|y\|_X \to +\infty,$$

а тому отримаємо

$$\frac{\langle A(y), y\rangle_X}{\|y\|_X} + \frac{\lambda\|y\|_{L_2(S;H)}^2}{\|y\|_X} - \frac{2^{\alpha-1}c_1T^{\alpha}\|y\|_{X_2}^{\alpha+1}}{\|y\|_X} -$$

$$-(c_1\|R\bar{0}\|_{X_2}^{\alpha}2^{\alpha-1} + c_1) \to +\infty \text{ при } \|y\|_X \to +\infty.$$

Теорема доведена.

***Зауваження* 1.** Рівняння $u'' + Au' + Bu + Cu = f$ розуміється як рівняння в просторі $D^*(S;V^*)$. Якщо $u \in C(S;V)$ з $u' \in X$ задовольняє це рівняння, то $u'' = f - Au' - Bu - Cu \in X^*$. Це означає, що $u' \in W \subset C(S;H)$. Звідси випливає справедливість умов $u'(0) = a_1 \in H$ і $u' \in W$.

***Зауваження* 2.** У випадку $X_2 = L_2(S;H)$ і $\alpha = 1$ достатня умова (4) матиме такий вигляд:

$$\frac{\langle Ay, y\rangle_X + \lambda\|y\|_{L_2(S;H)}^2}{\|y\|_X} \to +\infty \text{ при } \|y\|_X \to +\infty.$$

Висновки

За допомогою методу Фаедо–Гальоркіна можна довести розв'язність для класу еволюційних рівнянь II порядку із суттєво нелінійними псевдомонотонними на W_σ операторами. Як приклад можна розглянути диференціально-операторне рівняння II порядку з операторами, які зображаються у вигляді суми монотонного та демінеперервного оператора. Враховуючи перспективи одержаних результатів, можна обґрунтувати розв'язність для класів неавтономних еволюційних задач II порядку з диференціальними операторами, які породжують оператори варіаційного числення [5, 7]. Таким чином, порівняно з [12, 13] одержані результати дають можливість досліджувати принципово ширші класи хвильових процесів з "нелінійним тертям".

Н.В. Задоянчук, П.О. Касьянов

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ II ПОРЯДКА С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ W_{λ_0}-ПСЕВДОМОНОТОННЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Рассмотрен класс эволюционных уравнений с W_{λ_0}-псевдомонотонными отображениями. При

N.V. Zadoyanchuk, P.O. Kasyanov

ON SOLVABILITY FOR THE SECOND ORDER NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS WITH NONCOERCIVE W_{λ_0}-PSEUDOMONOTONE MAPS

In this paper, we consider a class of the second order evolution equations with W_{λ_0}-pseudomonotone помощи метода Фаэдо–Галеркина доказана разрешимость класса эволюционных уравнений с существенно нелинейными некоэрцитивными операторами, в частности с операторами вариационного исчисления. Получены равномерные априорные оценки в $L_q(S;V'_\sigma)$ на производные приближенных решений. По сравнению с [12, 13] полученные результаты позволяют исследовать принципиально более широкие классы волновых процессов с "нелинейным трением".

maps. Using the Faedo-Galerkin method, the resolvability for a class of evolution equations with nonlinear noncoercive operators, in particular with variation calculus operators, is proved. Furthermore, the uniform priori estimations in $L_q(S;V'_\sigma)$ for derivatives are obtained. The results of the study suggest the perspectives for investigation of wider classes of wave processes with "nonlinear friction" as compared to [12, 13].

1. *Мельник В.С.* Об операторных включениях в банаховых пространствах с плотно определенными операторами // System Research & Information Technologies. – 2003. – N 3. – P. 120–126.
2. *Bresis H.* Problems unilateraux // J. de Mathematiques Pures et Appliquees. – 1972. – **51**. – P. 377–406.
3. *Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 338 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М.: Мир, 1972. – 588 с.
6. *Temam R.* Infinite-dimentional dynamical systems in mechanics and phisics. – New York, 1988.
7. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 2. – С. 70–85.
8. *Мельник В.С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса (S_+) // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513–1523.
9. *Мельник В.С.* О критических точках некоторых классов многозначных отображений // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 87–98.
10. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 590 с.
11. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями // Кибернетика и системный анализ. Ч. I. – 2000. – № 4. – С. 57–69; ч. II. – 2002. – № 5. – С. 41–53; ч. III. – 2001.– № 2. – С. 70–83.
12. *Задоянчук Н.В., Касьянов П.О.* Про розв'язність диференціально-операторних рівнянь II порядку з некоерцитивними операторами w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Доп. НАН України. – 2006. – № 12. – С. 15–19.
13. *Задоянчук Н.В., Касьянов П.О.* Метод Фаедо–Гальоркіна для нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з операторами Вольтера // Нелінійні коливання. – 2007. – № 2. – С. 204–228.
14. *Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., YasinskiyV.V.* Evolution inclusions and inequalities in banach spaces with w_λ-pseudomonotone maps. – K.: Nauk. Dumka, 2007. – 308 p.
15. *Papageorgiou Nikolaos S.* Existence of Solutions for the Second Order Evolution Inclusions // J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 1994. – **7**, N 4. – P. 525–535.
16. *Papageorgiou Nikolaos S., Yannakakis Nikolaos.* Second Order Nonlinear Evolution Inclusions II: Structure of the Solution Set // Acta Mathematica Sinica, English Series. – 2006. – **22**, N 1. – P.195–206.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
28 грудня 2007 року