# ЕКОНОМІКА ТА ОРГАНІЗАЦІЯ ВИРОБНИЦТВА

УДК 320.332.336

Б.Ю. Кишакевич, А.К. Прикарпатський, І.П. Твердохліб

## ПОРТФЕЛЬНА КОНКУРЕНЦІЙНА МОДЕЛЬ РИНКУ АКЦІЙ З БІВАРІАТИВНОЮ ФУНКЦІЄЮ КОРИСНОСТІ

### Вступ

Сучасні емпіричні дослідження нової або інформаційної економіки розвинених ринкових країн засвідчують залежність темпів їх економічного зростання від відносного рівня курсу акцій [1, с. 38–45]. Банк може мати в активі свого портфеля значну кількість пакетів акцій різних бізнесово-виробничих структур, упорядкованих за натуральним показником їх фінансово-економічної привабливості або цінності для потенційного клієнта-покупця. В умовах сучасного цейтнот-біржового механізму реалізації акцій, що характеризується фіксованим часовим інтервалом і обмеженням доступу до повної інформації про їх корисність, важливою для покупця є оптимальна стратегія вибору [2, 3] найціннішого пакета акцій із запропонованого банківського портфеля. Різні постановки класичної задачі найкращого вибору розглянуто у фундаментальній монографії [2], де ефективно застосовувалась для аналізу цих проблем теорія ланцюгів Маркова та було обґрунтовано так звані *порогові правила зупинки* як визначальний елемент оптимальних стратегій вибору найкращого варіанта з деякої заданої множини.

Ситуація істотно ускладнюється, коли є кілька конкуруючих покупців: тоді постає нетривіальна проблема вибору клієнтом-покупцем потенційно найціннішого пакета акцій у межах портфеля раніше за інших. При цьому цейтнот-біржовий характер такого типу ринкових операцій надає покупцю акцій тільки динамічну порівняльну інформацію про їх цінність у процесі вибору. В [4] було досліджено проблему вибору двома конкуруючими покупцями найпривабливішого пакета акцій із банківського портфеля на підставі динамічної порівняльної інформації щодо цінності пакетів з використанням однієї функції корисності, обґрунтовано метод асоційованих марковських процесів пошуку оптимальних стратегій поведінки покупців акцій із врахуванням параметрів банківського середовища та отримано рівняння для визначення частки портфеля, перегляд якої є необхідним. Цінність пакетів акцій може також визначатись кількома критеріями, кожен з яких описується своєю функцією корисності.

### Постановка задачі

У запропонованому дослідженні розвивається метод асоційованих марковських процесів із [4] для побудови оптимальної стратегії поведінки двох конкуруючих клієнтів банку в процесі вибору ними потенційно найціннішого пакета акцій із банківського портфеля із *апріорі* заданими і розподіленими незалежно двома функціями корисності [2, 5, 6] пакетів акцій із врахуванням параметрів банківського середовища. Так, як і в [4], допускається, що покупці не мають фінансових обмежень і володіють достатнім капіталом для придбання будь-якого пакета акцій.

### Найкращий вибір пакета акцій із банківського портфеля на підставі двох функцій корисності

Нехай деякий банк сформував сукупність пакетів акцій, які виставляє на продаж. Кожен пакет описується в базі даних портфеля деяким набором характеристик, які в сукупності визначають привабливість чи корисність пакета для потенційного клієнта. Покупець вибирає з бази даних будь-який пакет акцій і вивчає його базові характеристики, після чого може відразу його придбати або повернути запит назад до портфеля і перейти до ознайомлення з наступним пакетом. Якщо корисність вибраного пакета виявиться нижчою за цінність попередньо розглянутих, то відразу формується запит на отримання наступного пакета акцій і так далі, аж поки не буде вибраний пакет акцій з характеристикою цінності, вищою за всі, вже переглянуті. У такому випадку покупець має прийняти рішення, чи він вважає даний пакет акцій потенційно найціннішим з усіх можливих, і тоді на ньому зупиняється, придбавши його, або переходить до аналізу привабливості наступних пакетів, враховуючи, що обсяг портфеля є скінченним і час на їх розгляд обмежений. Якщо ж клієнтів два або більше, то аналогічну стратегію вибору найкращого пакета акцій на підставі аналізу їх відносних характеристик вибирає також кожен із них, причому виграє торги акцій той покупець, який швидше, тобто за меншу кількість звертань до бази даних портфеля акцій банку, вибере найпривабливіший пакет.

Процес порівняння двох або більше отриманих для ознайомлення пакетів акцій покупцями за ступенем їх фінансової привабливості здійснюється з використанням *двох функцій корисності*, які дозволяють кількісно оцінювати цінність акцій за двома незалежними критеріями. Абстрагуючись від власне процедури такого порівняння, вимагатимемо лише від неї чіткого задання відношення переваги на множині об’єктів бази даних банківського портфеля.

На процес вибору клієнтом потенційно найціннішого пакета акцій накладаються певні додаткові фінансові обмеження, які істотно впливають на кількість запитів до бази даних портфеля акцій. Так, в умовах цейтнот-біржової процедури доступу покупця до бази даних портфеля акцій покупець зобов’язаний сплачувати певну суму, так званий штраф або fee, за кожний переглянутий і повернутий до портфеля пакет. На практиці банки застосовують різні дисципліни штрафування клієнтів за неуспішну трансакцію. Приміром, це буває фіксована сума грошових одиниць за кожен переглянутий пакет акцій або лінійна прогресивна шкала штрафних санкцій, що збільшує сплачену суму штрафу пропорційно порядковому номеру неуспішної трансакції. Якщо ж покупець зупинився на потенційно найціннішому для нього пакеті акцій і вибрав його для придбання, то банк виплачує йому певну винагороду, так званий gift, за успішну фінансову операцію, стимулюючи тим самим клієнтів до активної співпраці з ним.

**Портфельна конкуренційна модель ринку акцій з біваріативною функцією корисності**

Оскільки весь процес вибору потенційно найціннішого пакета акцій є майже повністю випадковим, то для його опису природним є використання теорії випадкових процесів. Тоді задача найкращого вибору пакета акцій із банківського портфеля за умов часових обмежень і конкуренції зводиться до визначення оптимального моменту зупинки процесу вибору акцій із бази даних кожним покупцем для заданих параметрів банківського середовища, дисципліни штрафування клієнтів і заданого двома незалежними функціями корисності відношення переваги на множині пакетів акцій банківського портфеля.

Вважатимемо, що наявні тільки два клієнти, конкуруючі під час процесу вибору найціннішого для кожного з них пакета акцій із запропонованого портфеля із скінченним обсягом $N \in Z_+$ елементів. Усі пакети акцій $A_i, i = \overline{1, N}$, пронумеруємо так, щоб

$$W_1(A_1) < W_1(A_2) < \ldots < W_1(A_N),$$

$$W_2(A_{\sigma(1)}) < W_2(A_{\sigma(2)}) < \ldots < W_2(A_{\sigma(N)}), \qquad (1)$$

де $\{W_i(A_j) \in [0;1],\ j = \overline{1, N}\}$, $i = 1, 2$, є відповідні набори величин корисності пакетів акцій, значення яких розподілені незалежно в межах заданого портфеля, тобто перестановка $\sigma \in S_N$ впорядкованого набору чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ цілком випадкова. Ймовірнісний простір $\Omega$ складається із всіляких пар перестановок $\{\omega_1, \ldots, \omega_N\} \times \{\sigma(\omega_1), \ldots, \sigma(\omega_N)\}$ набору чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, причому вважається, що всі вони рівноймовірні. Таким чином, результат процесу вибору за $n$-м переглядом покупцями пакета акцій $A_n, n = \overline{1, N}$, будемо позначати

$$\Omega_n^{(s)} := (X_n^{(s)}(\omega), Y_n^{(s)}(\omega)) \in$$

$$\in \{1, 2, \ldots, N^{(x)} := N\} \times$$

$$\times \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N^{(y)} := N),\ s = \overline{1, 2}\},$$

а моменти зупинки марковського процесу вибору найбажанішого пакета акцій клієнтами, при яких будуть найбільші значення математичних сподівань відповідних функцій ціни вибору, позначимо $\tau_s(\omega) \in H := \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $s = \overline{1, 2}$. Функцію ціни вибору для першого покупця вибираємо в такому вигляді:

$$V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2) =$$

$$= c_\alpha E\{1_{B_1} + 1_{B_2}\} - \alpha \sum_{k=1}^{\tau_1 - 1} \frac{k}{N^2} E\{1_{B_3} + 1_{B_4}\}, \qquad (2)$$

де $c_\alpha > 0$ — відповідний банківський gift-коефіцієнт; $\alpha > 0$ — fee-коефіцієнт штрафу за невикористану трансакцію купівлі пакета акцій; $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ — складні події, які визначаються згідно із співвідношеннями

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{\Omega_{\tau_1}^{(1)} = (N^{(x)}, N^{(y)}),\\
&\Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}) \vee \Omega_{\tau_1}^{(1)} = (\sigma^{-1}(N^{(x)}, N^{(y)}),\\
&\Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq \sigma^{-1}(N^{(x)}, N^{(y)}))\};\\
B_2 &= \{[\Omega_{\tau_1}^{(1)} = (N^{(x)}, N^{(y)}),\\
&\Omega_{\tau_2}^{(2)} = (N^{(x)}, N^{(y)}),\\
&\tau_1 < \tau_2] \vee [\Omega_{\tau_1}^{(1)} = (\sigma^{-1}(N^{(x)}, N^{(y)}),\\
&\Omega_{\tau_2}^{(2)} = \sigma^{-1}(N^{(x)}, N^{(y)})),\ \tau_1 < \tau_2]\};
\end{aligned} \qquad (3)$$

$$B_3 = \{\Omega_{\tau_1}^{(1)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}),$$
$$\Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}) \vee \Omega_k^{(1)} \neq (\sigma^{-1}(N^{(x)}, N^{(y)}),$$
$$\Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq \sigma^{-1}(N^{(x)}, N^{(y)}))\};$$
$$B_4 = \{[\Omega_k^{(1)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}),$$
$$\Omega_{\tau_2}^{(2)} \neq (N^{(x)}, N^{(y)}),\ k < \tau_2] \vee$$
$$\vee [\Omega_k^{(1)} \neq (\sigma^{-1}(N^{(x)}, N^{(y)}),$$
$$\Omega_{\tau_2}^{(2)} = \sigma^{-1}(N^{(x)}, N^{(y)})),\ k < \tau_2]\}.$$

Підкреслимо, що у виразі (2) ми конкретизували дисципліну штрафування клієнтів за відмову придбання розглянутого пакета акцій: величина штрафу за $k$-е повернення пакета до портфеля дорівнює $k\alpha/N^2$. Функція ціни вибору другого клієнта отримується цілком аналогічно.

Очевидно, що оптимальні стратегії вибору потенційно найціннішого пакета акцій двома конкуруючими покупцями можна ототожнити з визначенням оптимальних моментів $\tau_1^*$, $\tau_2^*$ зупинки цього процесу. З такою метою треба знайти розв'язки таких оптимізаційних задач:

$$\tau_1^* := \arg\sup_{\tau_1 \in H} V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2),\quad \tau_2^* := \arg\sup_{\tau_2 \in H} V_{\tau_2}^{(2)}(\tau_1), \qquad (4)$$

де $V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2), V_{\tau_2}^{(2)}(\tau_1)$ – функції ціни вибору першого і другого покупців виду (2).

Назвемо оптимізаційну задачу виду (4) з умовами (1)–(3) *портфельною конкуренційною моделлю ринку акцій із біваріативною функцією корисності.* Для розрахунку $\tau_s^*$ потрібно збудувати [2, 4, 6] базисні асоційовані марковські послідовності

$$x_{n+1}^{(s)} := \min\{t > x_n^{(s)} : (X_t^{(s)} >$$
$$> \max(X_{t-1}^{(s)}, \ldots, X_1^{(s)})) \vee (Y_t^{(s)} >$$
$$> \max(Y_{t-1}^{(s)}, \ldots, Y_1^{(s)}))\}, \qquad (5)$$

де $x_n^{(s)} \in H$, $n = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, 2}$, – моменти вибору найціннішого пакета акцій відповідними покупцями. Марковські послідовності (5) характеризує [2, 5, 6] лема, результат якої отримується простими обчисленнями.

**Лема 1.** Для $s = 1, 2$ та $i, j \in H$ цілочисельні послідовності (5) є дискретними ланцюгами Маркова на фазовому просторі $H$ з перехідними ймовірностями (6).

Отже, нами сконструйовані дві марковські послідовності (5), асоційовані з процесом вибору клієнтами найбільш цінного пакета акцій із банківського портфеля, з допомогою яких можна обчислити (4) на основі критерію, що формулюється в теоремі 1 [5]:

$$p_{ij}^{(s)} = \begin{cases} \dfrac{[2j(j-1)-i]i^2}{j^2(j-1)^2(2i-1)}, & 1 \le i < j, 0, i \ge j \ge 0, \\ 1, & i = 0, j = 1, \\ 0, & i = 0, j > 1, \\ 1 - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{N} \dfrac{[2k(k-1)-i]i^2}{k^2(k-1)^2(2i-1)}, & j = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

**Теорема 1.** Нехай матриця $P := \{p_{ij}^{(1)} : i, j \in H\}$ перехідних ймовірностей є такою, що $p_{ij}^{(1)} = 0$ для всіх $i \in H_+$, $j \in H_-$, де

$$H_+ := \{j \in H : (PV^{(1)}(\tau_2))_j > V_j^{(1)}(\tau_2)\},$$
$$H_- := \{j \in H : (PV^{(1)}(\tau_2))_j \le V_j^{(1)}(\tau_2)\}. \qquad (7)$$

Тоді отримана марковська послідовність (5) для оптимального вибору націннішого пакета акцій першим покупцем має бути зупинена в момент $\tau_1(l) = l = x_{\tau_1(l)}^{(1)} \in H$, який можна знайти, розв'язавши нерівності (7).

Відповідна функція ціни вибору пакета акцій в (7) виражається формулою

$$V_n^{(1)}(\tau_2) = c_\alpha \sum_{\theta=1}^{4} P\{D_\theta\} - \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N^2} \sum_{\theta=5}^{8} P\{D_\theta\}, \qquad (8)$$

де параметр $c_\alpha > 0$ вибирається з необхідної умови $V_n^{(1)}(\tau_2) > 0$ для всіх $n = \overline{1, N}$, а складні події $D_1, \ldots, D_8$ визначаються співвідношеннями

$$D_1 = \{X_n^{(1)} = N^{(x)},$$
$$X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)} \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\};$$
$$D_2 = \{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)},$$
$$n < \tau_2 \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(y)}\};$$
$$D_3 = \{X_n^{(1)} = N^{(x)},$$
$$X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)} \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, \qquad (9)$$
$$Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\};$$
$$D_4 = \{X_n^{(1)} = N^{(x)}, X_{\tau_2}^{(2)} = N^{(x)},$$
$$n < \tau_2 \vee Y_n^{(1)} = N^{(y)}, Y_{\tau_2}^{(2)} = N^{(y)}, n < \tau_2\};$$
$$D_5 = \{X_k^{(1)} \neq N^{(x)},$$
$$X_{\tau_2}^{(2)} \neq N^{(x)} \wedge Y_k^{(1)} \neq N^{(y)},$$

$$Y^{(2)}_{\tau_2} \neq N^{(y)}, n < \tau_2\};$$
$$D_6 = \{X^{(1)}_k \neq N^{(x)},$$
$$X^{(2)}_{\tau_2} \neq N^{(x)} \wedge Y^{(1)}_k \neq N^{(y)},$$
$$Y^{(2)}_{\tau_2} = N^{(y)}, k < \tau_2\};$$
$$D_7 = \{X^{(1)}_k \neq N^{(x)},$$
$$X^{(2)}_{\tau_2} = N^{(x)}, k < \tau_2 \wedge Y^{(1)}_k \neq N^{(y)},$$
$$Y^{(2)}_{\tau_2} \neq N^{(y)}\};$$
$$D_8 = \{X^{(1)}_k \neq N^{(x)}, X^{(2)}_{\tau_2} = N^{(x)},$$
$$k < \tau_2 \wedge Y^{(1)}_k \neq N^{(y)}, Y^{(2)}_{\tau_2} = N^{(y)}, k < \tau_2\}.$$

Далі треба обчислити ймовірності $P\{D_\theta\}$ настання подій $D_1, \ldots, D_8$.

### Структурний аналіз моделі

З використанням аналітичного виразу (8) функції ціни вибору найціннішого пакета акцій першим покупцем слід далі дослідити структуру множин $H_+$ і $H_-$ щодо перехідних ймовірностей (6). З цією метою застосуємо *метод асоційованих марковських процесів*, обгрунтований у [4]. У зв'язку із стислим обсягом статті подамо лише отримані кінцеві результати такого аналізу.

Нагадаємо, що згідно з теоремою 1 момент зупинки $l \in H$ процесу вибору пакета акцій першим клієнтом має задовольняти нерівності (7). За допомогою методу асоційованих марковських процесів ці нерівності зводяться до таких:

$$c_\alpha \sum_{k=1}^{N} \frac{(l-1)^2[2k(k-1)-1]}{(2l-3)k^2(k-1)^2} \left[ \frac{4k}{N}\left(1 - \sum_{j=l}^{k} \frac{j}{N} h_j\right) - \frac{k^2}{N^2}\left(1 - \sum_{j=l}^{k} \frac{j}{N} h_j\right)^2 \right] -$$
$$- \frac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=l}^{N} \frac{(l-1)^2[2k(k-1)-1]}{(2l-3)k^2(k-1)^2} \sum_{s=1}^{k-1} \frac{s}{N^2}\left(1 - \sum_{j=l}^{s} \frac{j}{N} h_j\right)^2 >$$
$$> c_\alpha \left( \frac{4(l-1)}{N} - \frac{(l-1)^2}{N^2} \right) - \frac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{k}{N^2}\left(1 - \sum_{j=l}^{k} \frac{j}{N} h_j\right)^2 \qquad (10)$$

і

$$c_\alpha \sum_{k=1}^{N} \frac{l^2[2k(k-1)-1]}{(2l-1)k^2(k-1)^2} \times \left[ \frac{4k}{N}\left(1 - \sum_{j=l}^{k} \frac{j}{N} h_j\right) - \frac{k^2}{N^2}\left(1 - \sum_{j=l}^{k} \frac{j}{N} h_j\right)^2 \right] -$$
$$- \frac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=l}^{N} \frac{l^2[2k(k-1)-1]}{(2l-1)k^2(k-1)^2} \sum_{s=1}^{k-1} \frac{s}{N^2}\left(1 - \sum_{j=l}^{s} \frac{j}{N} h_j\right)^2 \leq$$
$$\leq c_\alpha \left( \frac{4l}{N} - \frac{l^2}{N^2} \right) - \frac{\alpha(N-1)^2}{N^2} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{k}{N^2}\left(1 - \sum_{j=l}^{k} \frac{j}{N} h_j\right)^2. \qquad (11)$$

У співвідношеннях (10) і (11) для зручності використано величину $h_j, j = \overline{0, N}$, де $h_j := P\{\tau_2(l) = j\}$, причому $P\{\tau_2(l) = j\} = 0$ для всіх $j = \overline{1, l-1}$ та $h_j = (j-1)p^{(2)}_{1j}$ при $j = \overline{l, N}$.

Тепер нехай величина $l \in H$ задовольняє нерівності (10) і (11). Тоді отримаємо таке алгебричне рівняння для визначення моменту $l$ зупинки процесу вибору пакета акцій першим покупцем:

$$\frac{2c_\alpha l}{2l-1}\left[ 4\frac{l}{N}\ln\frac{N}{l} - \frac{2l^2}{N^2}\ln^2\frac{N}{l} - \frac{(N-l)l}{N^2} + \right.$$
$$+ \frac{2l^3}{N^3}\left(\frac{N}{l}\ln\frac{N}{l} - \frac{N}{l} + 1\right) -$$
$$\left. - \frac{l^4}{N^4}\left(\frac{N}{l}\left(\ln\frac{N}{l} - 1\right)^2 - 1\right) \right] -$$
$$- \alpha\left[ \frac{3l^2(N-l)}{2N^3} + \frac{l(N-l)^2}{2N^3} - \frac{l^2}{N^2}\ln\frac{N}{l} + \right.$$
$$+ \frac{l^2(N-l)^2}{2N^4} + \frac{l^4}{2N^4} \times$$
$$\left. \times \left(\frac{N}{l}\ln^2\frac{N}{l} - \frac{3N}{l}\ln\frac{N}{l} + \frac{7N}{2l} - 4 + \frac{l}{2N}\right) \right] =$$
$$= c_\alpha\left(\frac{4l}{N} - \frac{l^2}{N^2}\right) - \frac{\alpha(N-1)^2(l-1)l}{2N^4}. \qquad (12)$$

Далі за допомогою звичайної перевірки встановлюється справедливість такого твердження.

**Теорема 2.** Для прогресивно-лінійної і узгодженої з обсягом портфеля акцій дисципліни штрафування покупця марковські послідовності (5) допускають розбиття фазового простору $H$ в пряму суму підпросторів $H_+ = \{\overline{0, l-1}\}$ і $H_- = \{\overline{l, N}\}$ за необхідної умови $c_\alpha \geq \alpha/8 > 0$.

Оскільки отриманий алгебричний вираз (12) досить складний, коли величина $N \in Z_+$ є скінченною, то проведемо його асимптотичний аналіз за умови існування границі $\lim_{N\to\infty} l(N)/N := z \in$ $\in (0;1)$, де $l(N) \in H$ є відповідним розв'язком даного рівняння.

### Асимптотичний аналіз оптимальної стратегії портфельної конкурентної моделі ринку акцій із біваріативною функцією корисності

Застосувавши методи асимптотичного аналізу [7] до рівняння (12) при виконанні умови $\lim\limits_{N\to\infty} l(N)/N := z \in (0;1)$, із (12) отримаємо таке трансцендентне рівняння:

$$\beta(4z\ln z + 2z^2\ln^2 z + 2z^2\ln z + z^3\ln^2 z +$$
$$+ 2z^3\ln z + 5z - z^3 - z^4) +$$
$$+ (2z + 2z^2\ln z + 2z^2(1-z)^2 + 2z^3\ln^2 z +$$
$$+ 3z^3\ln z + 10z^3 - z^4 + z^5) = 0, \qquad (13)$$

де $4c_\alpha/\alpha := \beta \geq 1/2$. Трансцендентне рівняння (13) допускає тільки один розв'язок на відрізку (0; 1), який можна знайти числовими методами.

Наближені значення розв'язків рівняння (13) на зазначеному інтервалі для ряду значень інтегрального параметра $\beta \in [0{,}5; 1{,}5]$ показано в таблиці. Як наслідок, сформулюємо таку оптимальну стратегію поведінки покупця на ринку акцій при умові їх біваріативної корисності: *при досить значному обсягу $N \in Z_+$ пакетів акцій у портфелі банку оптимальною стратегією поведінки першого покупця при виборі найціннішого пакета акцій буде перегляд на відносну порівняльну цінність $l = z^* \times N \in Z_+$ акцій, а потім вибір першого в ряді пакета акцій, біваріативна корисність якого перевищує всі попередньо переглянуті.* Очевидно, що згідно з симетрією нашої моделі таку саму оптимальну стратегію можна рекомендувати й для другого клієнта.

***Таблиця.*** Дійсні розв'язки $z^*$ рівняння (13) при різних коефіцієнтах β

| $z^*$ | β |
|---|---|
| 0,155 | 0,5 |
| 0,171 | 0,6 |
| 0,186 | 0,7 |
| 0,199 | 0,8 |
| 0,21 | 0,9 |
| 0,22 | 1,0 |
| 0,228 | 1,1 |
| 0,236 | 1,2 |
| 0,243 | 1,3 |
| 0,249 | 1,4 |
| 0,254 | 1,5 |

Джерело: власні розрахунки.

### Висновки

Розглянута конкурентна модель ринку акцій у середовищі банківського портфеля в умовах цейтнот-біржового процесу з біваріативною функцією ціни вибору клієнтами-покупцями потенційно найціннішого пакета акцій адекватно описується спеціальним дискретним марковським процесом на фазовому просторі $H = \{0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N\}$. Як було показано, оптимальна стратегія покупця при виборі ним найціннішого пакета акцій визначається при досить великій кількості пакетів у портфелі універсальним трансцендентним рівнянням (13), що залежить від β, яка характеризує співвідношення банківських параметрів заохочення і штрафу. Умовою найменшого ризику втрат банку-продавця акцій, очевидно, є β = = 1/2, що зумовлює інваріантність рівняння (13) стосовно параметрів $c_\alpha$ і α. У цьому випадку покупцю досить переглянути $\sim 15{,}54\%$ пакетів акцій у портфелі для оптимального вибору.

Виявлено тенденцію зменшення рекомендованої для перегляду частки банківського портфеля при збільшенні кількості критеріїв відбору пакетів акцій покупцями-конкурентами. У випадку однієї функції корисності аналогічне до (13) рівняння визначає оптимальною часткою портфеля $\sim 23{,}75\%$ акцій [4], а з біваріативною функцією корисності, згідно з (13), треба переглядати вже лише $\sim 15{,}54\%$ пакетів. Ця тенденція справджується для дослідженої нами дисципліни штрафування покупців.

При використанні кількох критеріїв відбору важливу роль відіграє процедура встановлення переваг над парами пакетів акцій. Як можна зрозуміти з (5), при побудові асоційованих з процесом вибору потенційно найціннішого пакета акцій марковських послідовностей обидва покупці-конкуренти застосовують найпростішу схему попарного порівняння, коли обидва критерії є рівнозначними. Щоб розглянути інші варіанти процедур прийняття рішення щодо вибору порівнянь пакетів акцій на підставі кількох критеріїв, потрібні подальші дослідження та розвиток методу асоційованих марковських процесів [4].

Б.Ю. Кишакевич, А.К. Прикарпатский,
И.П. Твердохлиб

ПОРТФЕЛЬНАЯ КОНКУРЕНТНАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА АКЦИЙ С БИВАРИАТИВНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Предложена новая конкурентная модель рынка акций в среде банковского портфеля с бивариативной функцией полезности в условиях цейтнот-биржевого поведения клиентов-покупателей. Развит метод ассоциированных марковских процессов для нахождения оптимальной стратегии выбора наиболее ценного пакета акций. Получено алгебраическое уравнение, определяющее оптимальную стратегию выбора наиболее ценного для покупателя пакета акций на основе сравнения их полезности с использованием двух критериев при существовании конкуренции со стороны других клиентов. В частности, при известных условиях на так называемый банковский промоционный параметр относительно параметра "штрафа" за пропущенную трансакцию покупки акций при асимптотически значительном объеме портфеля банка выведено универсальное трансцендентное уравнение для нахождения оптимальной стратегии выбора наиболее привлекательного пакета акций потенциальным покупателем.

B.Yu. Kyshakevych, A.K. Prykarpatsky,
I.P. Tverdokhlib

PORTFOLIO COMPETING STOCK MARKET MODEL WITH THE BI-VARIATIVE UTILITY FUNCTION

This paper studies a competing stock market model with a bi-variative value function under the processing time restriction condition within a bank portfolio. A new version of the associated Markov process method for finding the optimal choice strategy of the most valued stock packet is devised. Under some conditions on the so called "gift" and "fee" bank parameters concerning stock packets both algebraic and universal asymptotic transcendental equations determining the most optimal client strategy within a competing stock market, taking into account the bi-variative stock value function, are obtained.

1. *Клодт Х. та ін.* Нова економіка: форми вияву, причини і наслідки. – К.: Таксон, 2006. – 306 с.
2. *Березовский Б.А.*, *Гнедин А.В.* Задача наилучшего выбора. – М.: Наука, 1984. – 198 с.
3. *Davis M.H.A.*, *Panas V.G.*, *Zariphopoulou T.* European option pricing with transaction costs // SIAM J. Control Optimiz. – 1993. – **31**. – P. 470–493.
4. *Кишакевич Б.Ю.*, *Прикарпатський А.К.*, *Твердохліб І.П.* Аналіз оптимальних стратегій портфельної конкуренційної моделі ринку акцій // Доп. НАН України. – 2009. – № 1 (у друці).
5. *Пресман Э.Л.*, *Сонин И.М.* Игровые задачи оптимальной остановки. Существование и единственность точек равновесия. Вероятностные проблемы управления в экономике. – М.: Наука, 1977. – С. 115–144.
6. *Мазалов В.В.*, *Винниченко С.В.* Моменты остановки и управляемые случайные блуждания. – Новосибирск: Наука, 1992. – 112 с.
7. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы. – М.: Наука, 1985. – 270 с.

Рекомендована Радою теплоенергетичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 13 березня 2008 року