УДК 517.927.8

П.Ф. Самусенко

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ У ТОЧЦІ

Вступ

Дослідження властивостей розв'язку задачі Коші

$$B(t)\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ t \in [0;T],$$

$$x(0) = x_0,$$

де $B(t)$ – квадратна матриця n-го порядку, а $f(x,t)$ – n-вимірна вектор-функція, проведено в праці Ю.Є. Боярінцева, В.О. Данілова, А.А. Логінова, В.Ф. Чистякова [1, с. 159–179], де вектор x_0 вибирався спеціальним чином і вимагалось виконання критерію "ранг–степінь".

А.М. Самойленком і В.П. Яковцем знайдено достатні умови зведення лінійної системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ t \in [0;T],$$

до центральної канонічної форми, що дозволило для цієї системи ввести поняття розв'язку типу Коші і знайти умови розв'язності відповідної початкової задачі [2, с. 53–74].

У комплексній області розв'язок задачі Коші розглядався в праці [3].

Асимптотичні розв'язки нелінійної системи диференціальних рівнянь з виродженням

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon),\ t \in [0;T],$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0,\ \varepsilon \in (0;\varepsilon_0],\ \varepsilon_0 << 1,$$

у випадку, коли ранг матриці $B(t)$ на відрізку $[0;T]$ змінюється, побудовано в [4, 5]. При цьому вимагалось, щоб

$$B(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} \text{ або } B(0) = \begin{pmatrix} J_p & 0 \\ 0 & E_{n-p} \end{pmatrix},$$

де E_i – одинична матриця i-го порядку; J_p – квадратна матриця p-го порядку, компоненти верхньої наддіагоналі якої дорівнюють одиниці, решта – нулю.

Сингулярно збурені системи лінійних диференціальних рівнянь з особливою точкою розглядались у працях [6, 7], де розроблено алгоритм побудови асимптотичного розв'язку зазначеної системи з певними, наперед заданими, властивостями. При цьому відповідні формальні розвинення будувались за степенями добутку двох величин: незалежної змінної та малого параметра. Аналогічні результати для нелінійних сингулярно збурених систем одержано в працях [8, 9].

Постановка задачі

У даній статті побудовано розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь за умови змінного рангу матриці $B(t)$ на відрізку $[0;T]$ і наявності точок повороту.

Побудова розв'язку задачі Коші

Розглянемо систему збурених диференціальних рівнянь

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = f(x,t,\varepsilon),\ t \in [0;T], \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0. \tag{2}$$

Нехай виконуються такі умови:

1) елементи матриці $B(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$;

2) вектор-функція $f(x,t,\varepsilon)$ має нескінченну кількість неперервних частинних похідних по всіх змінних на множині

$$G = \{(x,t,\varepsilon)\colon \|x\| \le a,$$

$$0 \le t \le T,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\},\ \|x_0\| < a;$$

3) рівняння $f(x,t,0) = 0$ на множині $D = \{(x, t)\colon \|x\| \le a,\ 0 \le t \le T\}$ має неперервний розв'язок $x = \varphi(t)$;

4) в'язка матриць $f_x(\varphi(0),0,0) - \lambda B(0)$, де $f_x(\varphi(0),0,0)$ – квадратна матриця n-го порядку, стовпцями якої є $\left.\dfrac{\partial f_i(x,t,0)}{\partial x_j}\right|_{(x,t)=(\varphi(0),0)}$, $i,j = \overline{1,n}$, регулярна, має $n-1$ простих "скінченних" і один "нескінченний" елементарних дільників;

5) $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n-1}$, де λ_i – власні значення матриці $f_x(\varphi(0), 0, 0)$ відносно $B(0)$.

З умови 4 випливає існування неособливих матриць P і Q, таких, що

$$Pf_x(\varphi(0), 0, 0)Q = \Omega, \quad PB(0)Q = H,$$

де

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix};$$
$$W = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}\}.$$

Зробимо в системі (1) заміну $x(t, \varepsilon) = Qy(t, \varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на P. Дістанемо

$$\varepsilon D(t)\frac{dy}{dt} = g(y, t, \varepsilon), \tag{3}$$

де $g(y, t, \varepsilon) = Pf(Qy, t, \varepsilon)$; $D(t) = PB(t)Q$.

Початкова умова (2) при цьому набуде вигляду

$$y(0, \varepsilon) = Q^{-1}x_0 \equiv y_0. \tag{4}$$

Розв’язок задачі (3), (4) шукатимемо у вигляді

$$y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \tag{5}$$

де $\bar{y}(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \bar{y}_i(t)$ – регулярний ряд; $\Pi y(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \Pi_i y(\tau)$ – примежевий ряд; $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ [10, с. 48].

Підставимо ряд (5) в систему (3)

$$\varepsilon D(t)\frac{d\bar{y}}{dt} + D(\varepsilon\tau)\frac{d\Pi y}{d\tau} = g(\bar{y} + \Pi y, t, \varepsilon) \tag{6}$$

і запишемо $g(\bar{y} + \Pi y, t, \varepsilon)$ у такому вигляді:

$$g(\bar{y}(t, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), t, \varepsilon) = g(\bar{y}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) +$$
$$+ (g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon)) \equiv$$
$$\equiv \bar{g}(t, \varepsilon) + \Pi g(\tau, \varepsilon).$$

Зобразимо вектор-функції $\bar{g}(t, \varepsilon)$ і $\Pi g(\tau, \varepsilon)$ у вигляді формальних рядів за степенями ε:

$$\bar{g}(t, \varepsilon) = g(\bar{y}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = g(\bar{y}_0(t), t, 0) +$$
$$+ \varepsilon(\bar{g}_y(t)\bar{y}_1(t) + g_1(t)) + ... +$$
$$+ \varepsilon^i(\bar{g}_y(t)\bar{y}_i(t) + g_i(t)) + ... \equiv \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \bar{g}_i(t),$$

де елементи матриці $\bar{g}_y(t) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)_1^n$ обчислюються в точці $(\bar{y}_0(t), t, 0)$, а вектори $\bar{g}_i(t)$ відповідним чином виражаються через $\bar{y}_k(t)$, $k < i$;

$$\Pi g(\tau, \varepsilon) =$$
$$= g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - g(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) =$$
$$= g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0) - g(\bar{y}_0(0), 0, 0) +$$
$$+ \varepsilon(g_y(\tau)\Pi_1 y(\tau) + G_1(\tau)) + ... +$$
$$+ \varepsilon^i(g_y(\tau)\Pi_i y(\tau) + G_i(\tau)) + ... \equiv \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \Pi g_i(\tau),$$

де елементи матриці $g_y(\tau)$ обчислюються в точці $(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0)$, а вектори $G_i(\tau)$ відповідним чином виражаються через $\Pi_k y(\tau)$, $k < i$.

Аналогічно запишемо матрицю $D(t)$:

$$D(\varepsilon\tau) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \frac{1}{i!}\frac{d^i D(0)}{dt^i}\tau^i.$$

У системі (6) зрівняємо окремо вирази, що залежать від t і τ:

$$\varepsilon D(t)\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{g}(t, \varepsilon), \tag{7}$$

$$D(\varepsilon\tau)\frac{d\Pi y}{d\tau} = \Pi g(\tau, \varepsilon). \tag{8}$$

У тотожностях (7), (8) зрівняємо коефіцієнти біля однакових степенів ε. Зокрема, біля ε^0 матимемо

$$g(\bar{y}_0(t), t, 0) = 0, \tag{9}$$

$$H\frac{d\Pi_0 y}{d\tau} =$$
$$= g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0) - g(\bar{y}_0(0), 0, 0). \tag{10}$$

Згідно з припущенням 3, система (9) має розв’язок $\bar{y}_0(t) = Q^{-1}\varphi(t)$. Тому система (10) набуде вигляду

$$H\frac{d\Pi_0 y}{d\tau} = g(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0, 0). \tag{11}$$

Надалі припускатимемо виконання ще й таких умов:

6) $\bar{y}_{01}(0) = y_{01}$, де $\bar{y}_{01}(0)$ і y_{01} – перші компоненти векторів $\bar{y}_0(0)$ і y_0, відповідно;

7) $g_1(y, t, \varepsilon)$ не містить y_2, y_3, ..., y_n.

Тоді система (11) має розв’язок $\Pi_0 y = \Pi_0 y(\tau)$, $\tau \ge 0$, такий, що виконується умова

$\bar{y}_0(0)+\Pi_0 y(0)=y_0$, причому $\Pi_{01}y(\tau)\equiv 0$, $\tau\ge 0$, і $\|\Pi_{02}y(\tau)\|\le c_0\exp(-\beta_0\tau)$, $\tau\ge 0$, $\beta_0>0$ [10, с. 65] ($\Pi_{01}y(\tau)$ — перша компонента вектор-функції $\Pi_0 y(\tau)$; $\Pi_{02}y(\tau)$ — (n – 1)-вимірна вектор-функція, що містить решту компонент $\Pi_0 y(\tau)$).

Нехай виконується і така умова:

8) $\max\limits_{t\in[0;\,T]}\|\varphi(t)\|+\sup\limits_{t\in[0;\,T]}\|Q\Pi_0 y(t/\varepsilon)\|\le a_0<a$.

Зрівнюючи в (7) і (8) коефіцієнти біля ε^k, $k\ge 1$, дістаємо

$$D(t)\frac{d\bar{y}_{k-1}}{dt}=\bar{g}_y(t)\bar{y}_k(t)+g_k(t), \qquad (12)$$

$$H\frac{d\Pi_k y}{d\tau}=$$

$$=g_y(\tau)\Pi_k y(\tau)+G_k(\tau)-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{\tau^i}{i!}\frac{d^iD(0)}{dt^i}\frac{d\Pi_{k-i}y(\tau)}{d\tau}. \qquad (13)$$

З умов 4, 5 випливає, що $\det\bar{g}_y(t)\ne 0$, $t\in[0;\,t_0]$, $t_0\le T$. Тому

$$\bar{y}_k(t)=(\bar{g}_y(t))^{-1}\left(D(t)\frac{d\bar{y}_{k-1}}{dt}-g_k(t)\right),\ \ k=1,2,\ldots$$

Із системи (13) дістаємо

$$\Pi_{k1}y(\tau)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\tau^i}{i!}\sum_{s=1}^{n}\frac{d^i\{D(0)\}_{1s}}{dt^i}\frac{d\{\Pi_{k-i}y(\tau)\}_s}{d\tau}-G_{k1}(\tau)$$

і

$$\frac{d\Pi_{k2}y}{d\tau}=W\Pi_{k2}y(\tau)+G_{k2}(\tau)-a_{k2}(\tau), \qquad (18)$$

де $a_{k2}(\tau)$ — (n – 1)-вимірна вектор-функція, компонентами якої є останні n – 1 компонент $(g_y(\tau)-\Omega)\Pi_k y(\tau)+\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\tau^i}{i!}\frac{d^iD(0)}{dt^i}\frac{d\Pi_{k-i}y(\tau)}{d\tau}$.

Нехай

$$\bar{y}_k(0)+\Pi_k y(0)=0. \qquad (15)$$

Вимагатимемо, щоб

$$\bar{y}_{k1}(0)+\Pi_{k1}y(0)=0,\ \ k\ge 1. \qquad (16)$$

Початкову умову для розв'язку системи (14) знайдемо з рівності (15):

$$\Pi_{k2}y(0)=-\bar{y}_{k2}(0). \qquad (17)$$

Зауважимо, що

$$\|\Pi_k y(\tau)\|\le c_k\exp(-\beta_k\tau),\ \ k\ge 1,\ \ \tau\ge 0,$$

$\beta_k>0$ [10, с. 57–65].

Достатньою умовою виконання (20) є умова:

9) $\dfrac{\partial^k g_1(y_0,0,0)}{\partial\varepsilon^k}=0$, $k=1,2,\ldots$ [4].

Покажемо, що побудований формальний розв'язок є рівномірним асимптотичним розвиненням "точного" розв'язку задачі (1), (2) на відрізку $[0;t_0]$.

Нехай φ_i, $i=\overline{1,n-1}$, — власні вектори матриці Ω відносно H, а $\tilde{\varphi}$ — власний вектор матриці H, що відповідає її нульовому власному значенню.

Позначимо ψ_i, $i=\overline{1,n-1}$, елементи нуль-простору матриць $(\Omega-\lambda_i H)^*$, а $\tilde{\psi}$ — елемент нуль-простору матриці H^*. Вектори ψ_i, $i=\overline{1,n-1}$, та $\tilde{\psi}$ визначимо так, щоб виконувалися рівності

$$(H\varphi_i,\psi_j)=\delta_{ij},\ \ i,j=\overline{1,n-1},\ \ (\Omega\tilde{\varphi},\tilde{\psi})=1,$$

де δ_{ij} — символ Кронекера [2, с. 32].

Зауважимо, що вектори φ_i, $i=\overline{1,n-1}$, $\tilde{\varphi}$ і ψ_i, $i=\overline{1,n-1}$, $\tilde{\psi}$ лінійно незалежні на відрізку $[0;T]$.

Запишемо систему (3) у такому вигляді:

$$\varepsilon H\frac{dy}{dt}=\Omega y+h(y,t,\varepsilon), \qquad (18)$$

де $h(y,t,\varepsilon)=g(y,t,\varepsilon)-\Omega y+\varepsilon(H-D(t))\dfrac{dy}{dt}$.

Однорідна система

$$\varepsilon H\frac{dy}{dt}=\Omega y$$

має n – 1 формальних лінійно незалежних розв'язків

$$y_i(t,\varepsilon)=u_i(\varepsilon)\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\lambda_i(\varepsilon)\right),\ \ i=\overline{1,n-1},$$

де $u_i(\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, а $\lambda_i(\varepsilon)$ — скалярні функції, причому

$$u_i(\varepsilon)=\varphi_i+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u_k^{(i)},\ \ \lambda_i(\varepsilon)=\lambda_i+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}. \qquad (19)$$

У системі (18) покладемо

$$y(t,\varepsilon)=z(t,\varepsilon)+y_m(t,\varepsilon),$$

де $y_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s(\bar{y}_s(t)+\Pi_s y(\tau))$. Матимемо

$$\varepsilon H\frac{dz}{dt}=\Omega z+l(z,t,\varepsilon), \qquad (20)$$

де $l(z,t,\varepsilon)=g(y_m(t,\varepsilon)+z,t,\varepsilon)-\Omega z-\varepsilon D(t)\frac{dy_m(t,\varepsilon)}{dt}+$ $+\varepsilon(H-D(t))\frac{dz}{dt}$. Зазначимо, що $\|l(0,t,\varepsilon)\|=$ $=O(\varepsilon^{m+1})$ для всіх $t\in[0;t_0]$.

Доведемо існування розв'язку $z=z(t,\varepsilon)$ системи (20), такого, що $z(0,\varepsilon)=0$.

Для цього складемо квадратні матриці n-го порядку

$$Q_1(\varepsilon)=[U_m(\varepsilon),\tilde{\varphi}],\quad P_1=[\Psi,\tilde{\psi}]^*,$$

де $U_m(\varepsilon)$ — прямокутна $(n\times(n-1))$-матриця, утворена з виразів (19), обриванням їх на $(m+1)$-му члені:

$$U_m(\varepsilon)=[u_1^{(m)}(\varepsilon),\dots,u_{n-1}^{(m)}(\varepsilon)],\quad \Psi=[\psi_1,\dots,\psi_{n-1}].$$

Зробимо в системі (20) заміну $z(t,\varepsilon)=$ $=Q_1(\varepsilon)v(t,\varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на P_1:

$$\varepsilon P_1HQ_1\frac{dv}{dt}=$$

$$=P_1LQ_1v+P_1l(Q_1v,t,\varepsilon)\quad\left(L=\Omega-\varepsilon H\frac{d}{dt}\right)$$

або

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\Psi^*HU_m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{dv}{dt}=\begin{pmatrix}\Psi^*LU_m & \Psi^*L\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}^*LU_m & \tilde{\psi}^*L\tilde{\varphi}\end{pmatrix}v+$$

$$+P_1l(Q_1v,t,\varepsilon). \qquad (21)$$

За побудовою

$$\Psi^*HU_m(0)=\|(H\varphi_i,\psi_j)\|_1^{n-1}=E_{n-1},$$

$$\tilde{\psi}^*LU_m=0,\quad \Psi^*L\tilde{\varphi}=0$$

і

$$LU_m(\varepsilon)=HU_m(\varepsilon)\Lambda_m(\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}K_1(\varepsilon),$$

де $\Lambda_m(\varepsilon)=\mathrm{diag}\{\lambda_1^{(m)}(\varepsilon),\dots,\lambda_{n-1}^{(m)}(\varepsilon)\}$; $K_1(\varepsilon)$ — прямокутна $(n\times(n-1))$-матриця [4].

Таким чином, система (21) набуде вигляду

$$\varepsilon R(t,\varepsilon)\frac{dv}{dt}=F(\varepsilon)v+r(v,t,\varepsilon), \qquad (22)$$

$$R(t,\varepsilon)=R_0(t,\varepsilon)+R_1(t,\varepsilon),$$

$$R_0(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Psi^*HU_m(\varepsilon) & 0\\ 0 & \tilde{\psi}^*D(t)\tilde{\varphi}\end{pmatrix},$$

$$R_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Psi^*(D(t)-H)U_m(\varepsilon) & \Psi^*D(t)\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}^*D(t)U_m(\varepsilon) & 0\end{pmatrix},$$

$$F(\varepsilon)=F_0(\varepsilon)+F_1(\varepsilon),$$

$$F_0(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Psi^*HU_m(\varepsilon)\Lambda_m(\varepsilon) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$F_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon^{m+1}\Psi^*K_1(\varepsilon) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$r(v,t,\varepsilon)=$$

$$=P_1\left(g(Q_1v+y_m,t,\varepsilon)-\Omega Q_1(\varepsilon)v-\varepsilon D(t)\frac{dy_m}{dt}\right).$$

Нехай мають місце умови:

10) $\{D(t)\}_{11}=td_{11}(t)$, причому $\mathrm{Re}\,d_{11}(0)<0$;

11) $|\{D(t)\}_{1i}|+|\{D(t)\}_{j1}|=O(t^2)$, $t\in[0;t_0]$, $i,j=\overline{2,n}$.

Тоді для системи (22) на відрізку $[0;t_0]$ існує єдиний розв'язок $v=v(t,\varepsilon)$, такий, що $v(0,\varepsilon)=0$ і $\|v(0,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^m)$ [4], тобто має місце така теорема

Теорема. Нехай виконуються умови 1–11. Тоді для всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon_1\le\varepsilon_0$ на відрізку $[0;t_0]$ існує єдиний розв'язок $x=x(t,\varepsilon)$ задачі (1), (2), такий, що

$$\|x(t,\varepsilon)-x_m(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^m),$$

де $x_m(t,\varepsilon)=Qy_m(t,\varepsilon)$.

Висновки

Результати, наведені в статті, є узагальненням теорем про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для сингулярно збурених нелінійних систем диференціальних рівнянь за умови змінного рангу матриці біля похідних на розглядуваному відрізку. Розроблений алгоритм асимптотичного інтегрування задачі Коші можна використати для розв'язання аналогічних задач для сингулярно збурених систем інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь із запізненням, рівнянь з імпульсним впливом тощо.

П.Ф. Самусенко

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ В ТОЧКЕ

С использованием метода пограничных функций построено решение задачи Коши сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с вырождением в точке.

P.F. Samusenko

THE ASYMPTOTICAL INTEGRATION OF THE SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATION IN A POINT

The study under consideration provides the insights into the solution of the initial-value problem of the singularly perturbed systems of differential equations with degeneration in a point, using the method of boundary functions.

1. *Бояринцев Ю.Е.*, *Данилов В.А.*, *Логинов А.А.*, *Чистяков В.Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1989. — 224 с.
2. *Самойленко А.М.*, *Шкіль М.І.*, *Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища шк., 2000. — 294 с.
3. *Самкова Г.Е.*, *Шарай Н.В.* Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 224–236.
4. *Самусенко П.Ф.* Про побудову асимптотичних розв'язків нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2006. — № 1. — С. 144–150.
5. *Самусенко П.Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням // Там же. — № 3. — С. 139–147.
6. *Iwano M.* Asymptotic Solutions of a System of Linear Ordinary Differential Equations Containing a Small Parameter, II // Funkcialaj Ekvacioj. — 1964. — **6**. — P. 89–141.
7. *Sibuya R.* Simplification of a System of Linear Ordinary Differential Equations about a Singular Point // Ibid. — 1962. — **4**. — P. 29–56.
8. *Balser W.*, *Mozo-Fernandez J.* Multisummability of formal solutions of singular perturbation problems // J. Differential Equations. — 2002. — **183**. — P. 526–545.
9. *Canalis-Durand M.*, *Mozo-Fernandez J.*, *Schafke R.* Monomial summability and doubly singular differential equations // Ibid. — 2007. — **233**. — P. 485–511.
10. *Васильева А.Б.*, *Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 10 квітня 2007 року