

УДК 621.372.061

Ю.Х. Ніжебецька, О.І. Рибін,
А.П. Ткачук, О.Б. Шарпан

НОРМАЛЬНЕ ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ З ДІЙСНИМ ЯДРОМ СИГНАЛУ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

Вступ

Оцінка подібності і відмінностей між сигналами заданої форми (які відповідають певному класу при розв'язанні задачі класифікації), а також реакціями досліджуваного об'єкта і тестовими сигналами має велике значення при розв'язанні задач радіотехніки, медицини, механіки тощо [1–3]. Така оцінка, зазвичай, проводиться на базі різних методів, які можна згрупувати в такі класи:

а) детерміновані методи, що оцінюють попадання реалізації досліджуваного сигналу в області n -вимірного гіперпростору, які відповідають певним класам, або відстань між вершиною n -вимірного вектора ознак досліджуваного сигналу і вершиною вектора ознак тестового сигналу [3, 4];

б) імовірнісні методи, що оцінюють вірогідність належності сигналу до наданого класу [1, 3];

в) кореляційні методи, до яких можна віднести класичну лінійну погоджену фільтрацію та її лінійні і нелінійні модифікації [2, 5, 6].

Погоджена фільтрація сигналів знайшла широке застосування для розв'язання задач класифікації внаслідок простоти її реалізації. Але класичні погоджені фільтри мають переваги лише при реєстрації сигналів наданої форми на фоні адитивного білого шуму і мають малу надійність у разі реєстрації сигналу наданої форми з пачки детермінованих сигналів, що ілюструють чисельні результати праці [5]. Тому оцінку ступеня збігу сигналів часто зручно робити в натуральних координатах, як це, наприклад, буває в електротехніці [7] при дослідженні ступеня спотворення гармонійних сигналів за коефіцієнтами гармонік. Але тестові сигнали збігаються за формою з якоюсь трансформантою відомих ортогональних перетворень досить рідко, що ускладнює оцінку подібності досліджуваного і тестового сигналу.

У працях [8, 9] запропоновано методи нормалізації перетворення сигналом (нормалізація за кроком [8]) або сигналу перетворенням (нормалізація за рівнем [9]), для яких спектри трансформант містять тільки одну складову, якщо досліджуваний сигнал тотожний тестовому. Якщо ж сигнали мають незначні розходження, то спектр трансформант буде містити також невеликі за амплітудою вищі спектральні складові, і тоді ступінь розходження можна оцінювати кількісно за коефіцієнтом трансформант [10, 11], який подібний до коефіцієнта гармонік для гармонійних сигналів.

Метод нормалізації сигналу за кроком дозволяє нормалізувати дискретне ортогональне перетворення тільки такими тестовими сигналами, які є гладкими і не мають розривів першого роду [8]. До того ж така нормалізація передбачає нерівномірний крок дискретизації, що створює додаткові незручності. Нормалізація сигналу за рівнем [9] не має обмежень до форми тестового сигналу, але значні складнощі такого перетворення пов'язані з необхідністю "центрувати" як тестовий, так і досліджуваний сигнал. Крім того, координатний базис нормалізованого за рівнем перетворення не дозволяє в подальшому використовувати нормалізовані сигнали при розв'язанні диференціальних рівнянь.

Постановка задачі

Мета статті – створення дискретного матричного оператора нормального ортогонального перетворення з еквідистантною дискретизацією, при якому тестовий сигнал збігається (з точністю до масштабного множника) з першою трансформантою такого перетворення. Ступінь відмінностей і подібності між досліджуваним і тестовим сигналом чисельно оцінюється коефіцієнтом трансформант [10, 11], а реєстрація сигналу (при погодженій фільтрації) виконується за "гостротою" (величиною, оберненою до коефіцієнта трансформант).

Формування матриці нормального перетворення і аналіз одержаних результатів

Для визначеності і простоти ілюстрації виберемо формат перетворення N , який дорівнює восьми, що дасть можливість надалі узагальнити отриманий результат на довільний формат $N = 2^n$, де n – ціле додатне число. Формат перетворення і формат сигналу збігаються. Тому нехай сигнал $x(t)$ на періоді, який дорівнює три-

валості сигналу, задається вектором відліків $\bar{X}_0 = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, де “т” – знак транспонування.

Для одержання нормального перетворення сигналу \bar{X}_0 проведемо ряд перетворень, при кожному з яких кількість ненульових трансформант порівняно з вихідним сигналом буде зменшуватися вдвічі. Дискретним матричним оператором першого з таких перетворень \bar{W}_1 буде блочно-діагональна матриця, головна діагональ якої складається з блоків $\bar{W}_1^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} \\ -x_{i+2} & x_{i+1} \end{bmatrix}$.

У результаті перемноження матриці \bar{W}_1 і вектора \bar{X}_0 одержимо стовпець першого (із серії) перетворення $\bar{X}_1 = \bar{W}_1 \bar{X}_0$, де для $N = 8$ матимемо

$$\bar{X}_1 = [(x_1^2 + x_2^2), 0, (x_3^2 + x_4^2), 0, (x_5^2 + x_6^2), 0, (x_7^2 + x_8^2), 0]^T.$$

Для забезпечення ортогональності кратного перетворення матрицю \bar{W}_1 слід нормувати, для чого знайдемо добуток $\bar{W}_1 \bar{W}_1^T = \text{diag}\{\bar{\epsilon}_1\}$, де $\text{diag}\{\bar{\epsilon}_1\}$ – діагональна матриця з елементами головної діагоналі $(x_1^2 + x_2^2)$, $(x_3^2 + x_4^2)$, $(x_5^2 + x_6^2)$, $(x_7^2 + x_8^2)$.

Поділивши рядки матриці \bar{W}_1 на відповідні значення $(x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2)^{1/2}$ діагоналі, одержимо матрицю \bar{W}_{1N} , таку, що $\bar{W}_{1N} \bar{W}_{1N}^T = \bar{W}_{1N}^T \bar{W}_{1N} = \bar{E}$, де \bar{E} – одинична матриця.

Тоді частково нормалізований (з чотирма нульовими значеннями) спектр \bar{X}_{1N} має вигляд

$$\bar{X}_{1N} = [\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, 0, \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, 0, \sqrt{x_5^2 + x_6^2}, 0, \sqrt{x_7^2 + x_8^2}, 0]^T.$$

Для перетворення ненульових значень сигналу \bar{X}_{1N} побудуємо матрицю \bar{W}_2 аналогічно тому, як це було зроблено для матриці \bar{W}_1 , тобто друге перетворення \bar{W}_2 є матрицею, діагональні елементи якої (що відповідають нулям вектора \bar{X}_{1N}) дорівнюють одиницям. Елементи матриці \bar{W}_2 , номера рядків і стовпців яких

відповідають ненульовим елементам вектора \bar{X}_{1N} , мають значення $w_{11} = w_{33} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $w_{13} = -w_{31} = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $w_{55} = w_{77} = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $w_{57} = -w_{75} = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$.

Після відповідного нормування матриці другого перетворення одержимо вектор \bar{X}_{2N} з ненульовими елементами в першому рядку $x_{N2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ і в п'ятому рядку $x_{N5} = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$.

Для двох ненульових елементів, що залишилися, побудуємо матрицю \bar{W}_{3N} . Результуюче нормальне перетворення матиме вигляд

$$\bar{W} = \bar{W}_{3N} \bar{W}_{2N} \bar{W}_{1N}. \quad (1)$$

Для виконання умови нормування матриці перетворення розділимо її рядки на $\sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}$, позначивши нормовану матрицю \bar{W}_N .

Спектр отриманого нормального перетворення \bar{X}_{NN} запишемо у вигляді

$$\bar{W}_N \bar{X}_0 = \bar{X}_{NN} = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T.$$

При великому форматі N сигналу \bar{X}_0 кількість часткових перетворень \bar{W}_{iN} при формуванні матриці оператора нормального перетворення в (1) збільшиться, тобто для формату $N = 2^n$ кількість часткових операторів дорівнюватиме n .

Як приклад побудови трансформант нормального перетворення розглянемо пульсограму (рис. 1), зображену на періоді у форматі $N = 32$.

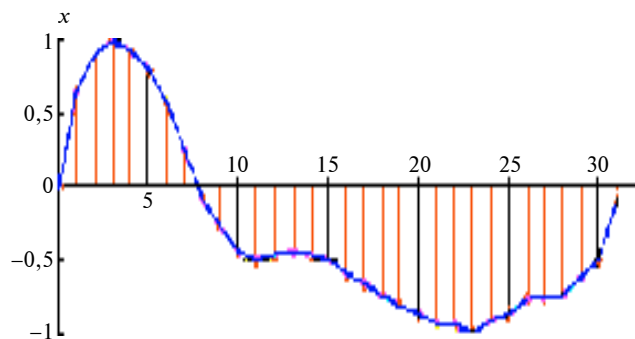


Рис. 1. Пульсограма, взята як еталонний сигнал для формування матриці перетворення

На рис. 2 наведені перша, третя і сімнадцята трансформанти отриманого за допомогою описаного вище алгоритму формування матриці нормального перетворення.

Як видно з цього рисунка, перша трансформанта ненормованої матриці перетворення з точністю до постійного масштабного множника збігається з пульсограмою рис. 1, і всі трансформанти перетворення рис. 2 ортогональні, про що свідчить спектр перетворення \overline{W}_N на рис. 3.

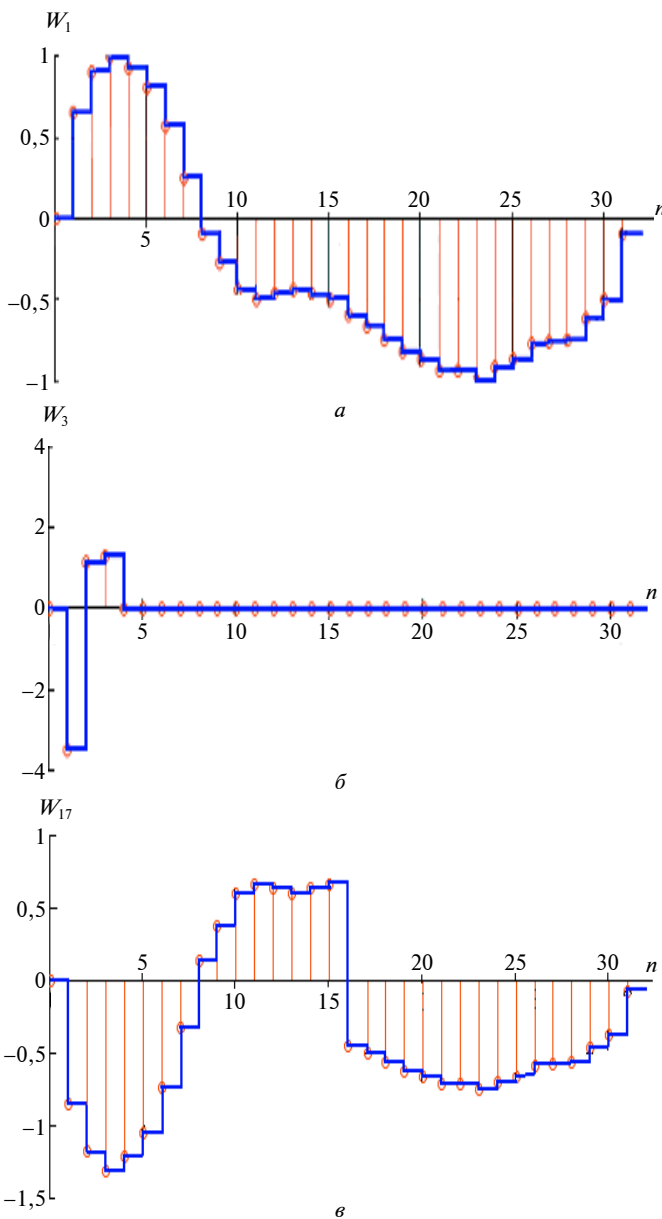


Рис. 2. Перша (а), третя (б) і сімнадцята (е) трансформанти матриці нормального перетворення

Цікаво, що коли за еталонний сигнал взяти одиницю, постійну на періоді, то нормальне перетворення такого сигналу збігатиметься з перетворенням Хаара.

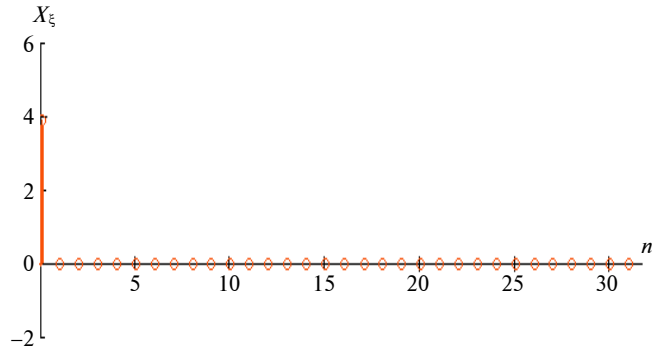


Рис. 3. Спектр еталонного сигналу при еталонному перетворенні

Описану вище процедуру формування нормального дискретного матричного оператора можна використати для одержання перетворення, в якому (в загальному випадку) всі відліки трансформант вищих порядків будуть ненульовими. При цьому перший крок часткового перетворення \overline{W}_{1N} буде таким самим, а для подальших кроків нормалізації для елементів матриці, наприклад \overline{W}_2 , які відповідають нульовим елементам частково нормалізованого вектора \overline{X}_{1N} , у головній діагоналі запишемо в комірках $(i+1)(i+1)$ і $(i+3)(i+3)$ $\sqrt{x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2}$. Крім того, в комірках $(i+1)(i+3)$ і $(i+3)(i+1)$ запишемо відповідно $\sqrt{x_{i+3}^2 + x_{i+4}^2}$ і $-\sqrt{x_{i+3}^2 + x_{i+4}^2}$. В цьому випадку, наприклад, матриця перетворення четвертого порядку матиме вигляд

$$\overline{W}_{4N} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{A} & \frac{x_2}{A} & \frac{x_3}{A} & \frac{x_4}{A} \\ \frac{x_2}{A} & \frac{x_1}{A} & \frac{x_4}{A} & \frac{x_3}{A} \\ -x_1 b & -x_2 b & x_3 a & x_4 a \\ \frac{x_2 b}{A a} & \frac{-x_1 b}{A a} & \frac{x_4 a}{A b} & \frac{x_3 a}{A b} \end{bmatrix},$$

де $A = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$; $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$.

В разі побудови за останнім алгоритмом нормальної матриці восьмого порядку одержимо

$$\overline{\overline{W}}_{8N} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{A} & \frac{x_2}{A} & \frac{x_3}{A} & \frac{x_4}{A} \\ \frac{x_2}{A} & \frac{x_1}{A} & \frac{x_4}{A} & \frac{x_3}{A} \\ \frac{x_1 b}{Aa} & \frac{x_2 b}{Aa} & \frac{x_3 a}{Ab} & \frac{x_4 a}{Ab} \\ \frac{x_2 b}{Aa} & \frac{x_1 b}{Aa} & \frac{x_4 a}{Ab} & \frac{x_3 a}{Ab} \\ \frac{x_1 \beta}{A\alpha} & \frac{x_2 \beta}{A\alpha} & \frac{x_3 \beta}{A\alpha} & \frac{x_4 \beta}{A\alpha} \\ \frac{x_2 \beta}{A\alpha} & \frac{x_1 \beta}{A\alpha} & \frac{x_4 \beta}{A\alpha} & \frac{x_3 \beta}{A\alpha} \\ \frac{x_1 \beta b}{A\alpha a} & \frac{x_2 \beta b}{A\alpha a} & \frac{x_3 \beta a}{A\alpha b} & \frac{x_4 \beta a}{A\alpha b} \\ \frac{x_2 \beta b}{A\alpha a} & \frac{x_1 \beta b}{A\alpha a} & \frac{x_4 \beta a}{A\alpha b} & \frac{x_3 \beta a}{A\alpha b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_5}{A} & \frac{x_6}{A} & \frac{x_7}{A} & \frac{x_8}{A} \\ \frac{x_6}{A} & \frac{x_5}{A} & \frac{x_8}{A} & \frac{x_7}{A} \\ \frac{x_5 d}{Ac} & \frac{x_6 d}{Ac} & \frac{x_7 c}{Ad} & \frac{x_8 c}{Ad} \\ \frac{x_6 d}{Ac} & \frac{x_5 d}{Ac} & \frac{x_8 c}{Ad} & \frac{x_7 c}{Ad} \\ \frac{x_5 \alpha}{A\beta} & \frac{x_6 \alpha}{A\beta} & \frac{x_7 \alpha}{A\beta} & \frac{x_8 \alpha}{A\beta} \\ \frac{x_6 \alpha}{A\beta} & \frac{x_5 \alpha}{A\beta} & \frac{x_8 \alpha}{A\beta} & \frac{x_7 \alpha}{A\beta} \\ \frac{x_5 \alpha d}{A\beta c} & \frac{x_6 \alpha d}{A\beta c} & \frac{x_7 \alpha c}{A\beta d} & \frac{x_8 \alpha c}{A\beta d} \\ \frac{x_6 \alpha d}{A\beta c} & \frac{x_5 \alpha d}{A\beta c} & \frac{x_8 \alpha c}{A\beta d} & \frac{x_7 \alpha c}{A\beta d} \end{bmatrix},$$

де $A = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}$; $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$; $c = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$; $d = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$; $\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$; $\beta = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$.

Тепер на основі аналізу виду матриць нормального перетворення різних порядків побудуємо алгоритм безпосереднього формування цієї матриці, не вдаючись до складання матриць нижчого порядку і знаходження їх добутку, оскільки

для великих значень N цей процес є досить трудомістким.

Отже, $\overline{\overline{W}}_N$ будемо розглядати кожний елемент матриці $\overline{\overline{W}}_N$ як добуток кількох множників, вид яких визначиться місцем розташування елемента в тому чи іншому рядку/стовпці $i, j \in \overline{1, n}$ матриці нормального перетворення:

$$|W_{Ni,j}| = \frac{1}{A} M_{i,j} \prod M_{i,j}^k. \quad (2)$$

Для парних рядків i матриці до складу елемента $W_{Ni,j}$ згідно з виразом (2) входить множник $M_{i,j}$, що дорівнює j -му відліку сигналу, на основі якого формується матриця перетворення. Для непарних рядків i матимемо $M_{i,j} = x_{j-1}$, якщо у стовпця j парний номер, і $M_{i,j} = x_{j+1}$, якщо непарний.

Далі для матриці форматом $N = 2^n$ потрібно провести $n - 1$ аналогічну операцію з визначення виду множників $M_{i,j}^k$. Для цього розіб'ємо послідовність відліків еталонного сигналу по парах значень, позначивши їх як $f_1^1, f_2^1, \dots, f_{N/2}^1$, потім по четвірках, одержавши множини $f_1^2, f_2^2, \dots, f_{N/4}^2$. З кожних чотирьох рядків матриці нормального перетворення для останніх двох характерним є множник $M_{i,j}^1$, що визначається вже наявним у комірках матриці множником $M_{i,j}$. Таким чином, якщо останній належить множині значень f_z^2 , то

$$M_{i,j}^1 = \begin{cases} \frac{\sqrt{x_{4z-1}^2 + x_{4z}^2}}{\sqrt{x_{4z-3}^2 + x_{4z-2}^2}} & \text{при } M_{i,j} \in f_{2z-1}^1, \\ \frac{\sqrt{x_{4z-3}^2 + x_{4z-2}^2}}{\sqrt{x_{4z-1}^2 + x_{4z}^2}} & \text{при } M_{i,j} \in f_{2z}^1. \end{cases}$$

Значення множника $M_{i,j}^2$ знаходимо аналогічно. Розбиваємо послідовність значень вихідного сигналу по вісім відліків, одержуючи в такий спосіб множини $f_1^3, f_2^3, \dots, f_{N/8}^3$. Множник $M_{i,j}^2 \in$ в останніх чотирьох рядках матриці перетворення з кожних восьми i залежить від вже наявного в комірці (i, j) матриці множника $M_{i,j}$, так що якщо він належить множині f_z^3 , то

$$M_{i,j}^2 = \begin{cases} \sqrt{\sum_{l=8z-3}^{8z} x_l^2} & \text{при } M_{i,j}^2 \in f_{2z-1}^2, \\ \sqrt{\sum_{l=8z-7}^{8z-4} x_l^2} & \\ \sqrt{\sum_{l=8z-7}^{8z-4} x_l^2} & \text{при } M_{i,j}^2 \in f_{2z}^2, \\ \sqrt{\sum_{l=8z-3}^{8z} x_l^2} & \end{cases}$$

і так далі для всіх множників виду $M_{i,j}^k$ при $k \leq n-1$.

Значення параметра A для формули (2) визначається з умови нормування матриці нормального перетворення як $\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$.

Перша і п'ята трансформанти для отриманого нормального перетворення при операторі перетворення 32-го порядку наведені на рис. 4.

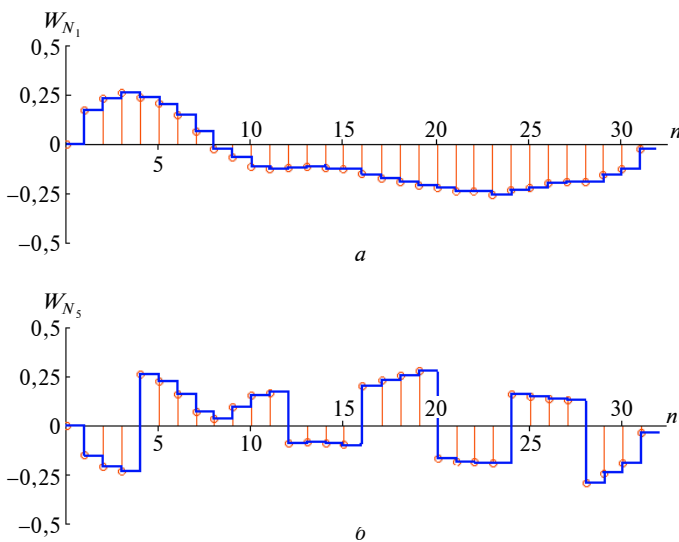


Рис. 4. Перша (а) і п'ята (б) трансформанти нормованої матриці нормального перетворення, для якого всі відліки трансформант є ненульовими

Відзначимо, що якщо в основу побудови матриці нормального перетворення за наведеним вище алгоритмом покласти одиницю, постійну на періоді, то воно збігатиметься з перетворенням Уолша—Адамара.

У випадку, коли за еталонний сигнал взята перша трансформанта косинусного перетворення, запропонована вище процедура формування нормального перетворення дає систему функцій,

що дуже відрізняються від косинусних (рис. 5, на якому наведені перші чотири складові нормального перетворення (а–г) при еталонному сигналі у вигляді першої косинусної трансформанти).

Спектри сигналу, тотожного першій трансформанті, і спотвореного сигналу (рис. 6, а) наведені на рис. 3 і б, б, відповідно.

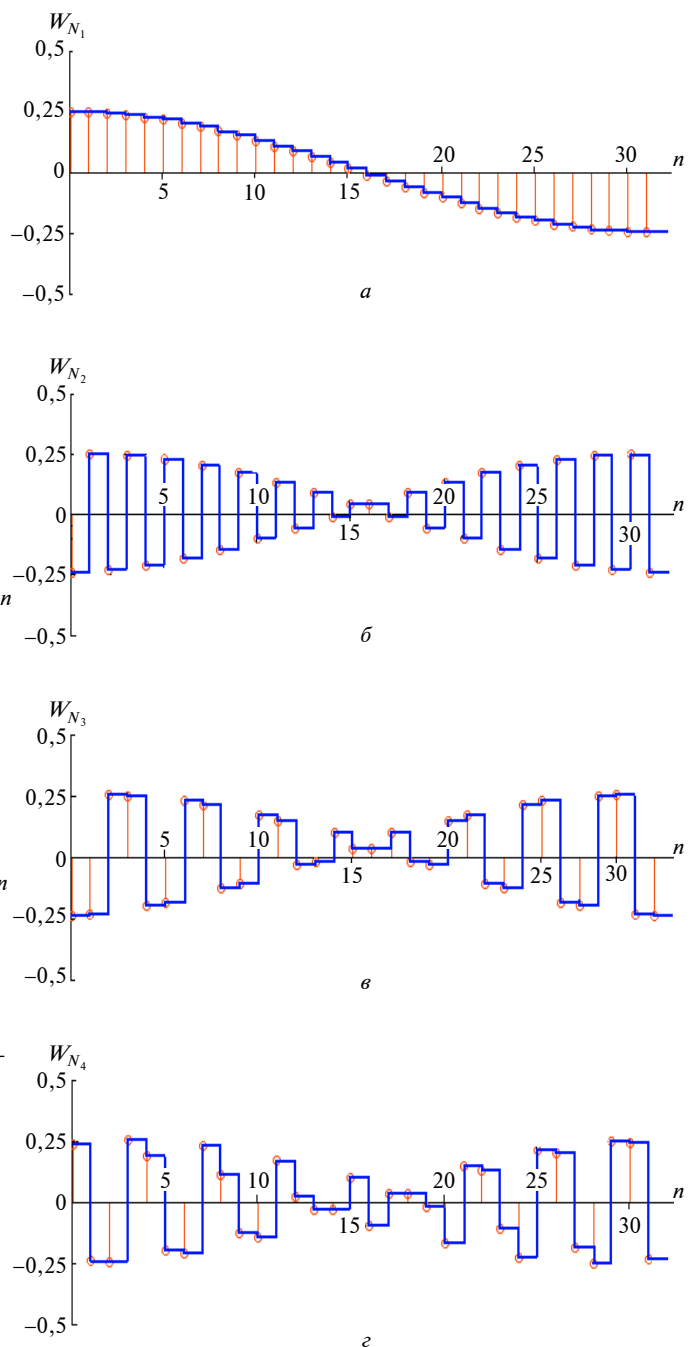


Рис. 5. Трансформанти нормального перетворення при еталонному сигналі у вигляді першої трансформанти косинусного перетворення

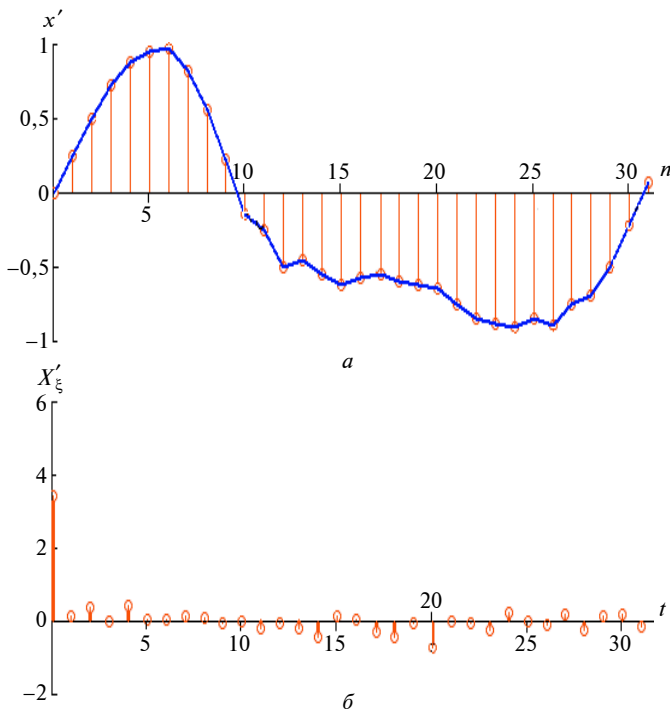


Рис. 6. Спотворений сигнал і його спектр при застосуванні до нього нормального перетворення

Висновки

Запропоновано метод створення матричного оператора дискретного ортогонального перетворення, для якого перша трансформанта збігається з тестовим сигналом, та алгоритм безпосереднього формування такого перетворення порядку N , що дає можливість значно зменшити операційні похибки за рахунок обмеженої роз-

рядності операндів, які виникають при безпосередньому множенні часткових нормальних операторів \overline{W}_{N_i} .

Еквідистантний крок дискретизації при нормальному перетворенні дає змогу використовувати відомі методи (різницеві і спектральні) при аналізі проходження сигналів електричними колами. Апаратурна реалізація процедури нормалізації, зазвичай, передбачає еквідистантну дискретизацію, що теж свідчить про позитивні властивості методу нормалізації.

Застосування для оцінки подібності та розбіжності тестового і досліджуваного сигналів коефіцієнта трансформант дозволяє давати чисельну оцінку міри такої подібності.

Реєстрацію сигналів заданої форми в пачці детермінованих сигналів (нормальна погоджена фільтрація) у вікні, довжина якого дорівнює довжині тестового сигналу, зручно проводити, використовуючи “гостроту”, що є перевагою порівняно з класичною погодженою лінійною фільтрацією.

Запропоноване перетворення може знайти широке застосування при реєстрації сигналів на даної форми при аналізі медичних, радіотехнічних та інших сигналів. Розробка двовимірного нормального ортогонального дискретного перетворення на базі запропонованих алгоритмів дасть змогу в подальшому реєструвати двовимірні образи (обличчя, підписи, відбитки пальців тощо).

Ю.Х. Нижбецкая, А.И. Рыбин, А.П. Ткачук,
О.Б. Шарпан

НОРМАЛЬНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЯДРОМ СИГНАЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ
ФОРМЫ

Предложен метод формирования дискретного ортогонального преобразования, названного нормальным, при котором спектр преобразования для тестового сигнала произвольной формы будет содержать только одну ненулевую трансформанту.

Yu.Kh. Nizhebetska, O.I. Rybin, A.P. Tkachuk,
O.B. Sharpan

NORMAL DISCRETE TRANSFORMATION WITH
THE REAL CORE OF THE ARBITRARY SHAPE
SIGNAL

In this article, the method of formation of the discrete orthogonal transformation, named normal, is proposed. The transformation spectrum has only one nonzero transformation for the arbitrary shape test signal.

1. *Экспертные системы в медицине* / А.Н. Продеус, Е.Н. Захрабова. – К.: ВЕК+, 1998. – 320 с.
2. *Финк Л.М.* Теория передачи дискретных сообщений. – Изд. 2-е, перераб., доп. – М.: Сов. радио, 1970. – 728 с.
3. *Абакумов В.Г., Рибін О.І., Сватош Й.* Біомедичні сигнали. Генезис, обробка, моніторинг. – К.: Нора-прінт, 2001. – 516 с.
4. *Ахмед Н., Рао К.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Пер. с англ.; Под общ. ред. Н.Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980. – 248 с.
5. *Ян И.* Нелинейные согласованные фильтры для анализа различий // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1999. – № 6. – С. 51–58.
6. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. II. – М.: Сов. радио, 1967. – 328 с.
7. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учеб. для вузов. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
8. *Рыбин А.И.* Нормализация дискретных ортогональных преобразований тестовым сигналом // Радиоэлектроника. – 2004. – № 7. – С. 39–46.
9. *Мельник А.Д., Рибін О.І.* Нормалізація тестового сигналу із збереженням еквідистантного кроку дискретизації // Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Радіотехніка, радіоапаратуробудування. – 2007. – Вип. 34. – С. 24–29.
10. *Рибін О.І., Сакалош Т.В., Шарпан О.Б.* Аналіз пульсограм на базі процедури нормалізації ортогональних перетворень REX // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2005. – № 4. – С. 25–33.
11. *Рыбин А.И., Шарпан О.Б., Григоренко Е.Г., Сакалош Т.В.* Коэффициенты трансформант нормализованных ортогональных преобразований и диагностика пульсограм // Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Приладобудування. – 2005. – Вип. 30. – С. 148–156.

Рекомендована Радою радіотехнічного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
21 січня 2008 року