ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 519.21

В.В. Булдигін, О.А. Тимошенко

ТОЧНИЙ ПОРЯДОК РОСТУ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вступ

У працях Й.І. Гіхмана і А.В. Скорохода [1], Г. Келлера [2], пізніше В.В. Булдигіна та інших авторів [3–6] розглядалась асимптотична поведінка розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР)

$$d\xi(t) = g(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dw(t),$$

$$t \ge 0\,, \xi(0) \equiv b,\ b > 0, \qquad (*)$$

де w – стандартний вінерів процес; b – невипадкова додатна стала; ξ – розв'язок СДР $(*)$; g і σ – такі неперервні додатні функції, що рівняння $(*)$ має єдиний та майже напевно (м. н.) неперервний розв'язок (див., наприклад, [1]). У зазначених працях розглядався випадок, коли $P\{\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)=\infty\}>0$. Одним із результатів цих досліджень є умови, за яких *точний порядок росту* розв'язку ξ визначається невипадковою функцією

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\xi(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\xi(t) = \infty\}, \qquad (**)$$

де μ – розв'язок звичайного диференціального рівняння (ЗДР), яке відповідає СДР $(*)$ при $\sigma =$ $= 0$, тобто

$$d\mu(t) = g(\mu(t))dt,\ t \ge 0\,, \mu(0) = b, b > 0. \qquad (***)$$

Постановка задачі

Мета статті – розгляд подібної задачі для СДР з коефіцієнтом зсуву і дифузії, які залежать від часу.

Основні результати

Розглянемо СДР

$$d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t),\ t \ge 0,$$

$$\eta(0) \equiv b,\ b > 0, \qquad (1)$$

де w, b – позначення ті самі, що і в $(*)$; η – розв'язок рівняння (1); θ – неперервна функція; g, φ і σ – неперервні додатні функції, такі, що (1) має єдиний та майже напевно неперервний розв'язок η.

Позначимо

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)du,\ t \ge 0,$$

і припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty}\Phi(t) = \infty. \qquad (2)$$

Зауважимо, що при $\varphi(t) = \theta(t) = 1,\ t \ge 0$, отримаємо рівняння $(*)$.

Розглянемо ЗДР

$$d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)dt,\ t \ge 0,$$

$$\mu(0) \equiv b,\ b > 0. \qquad (3)$$

Задача полягає в тому, щоб знайти умови, при яких розв'язок μ ЗДР (3) є точним порядком росту розв'язку η СДР (1), тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \infty\}. \qquad (4)$$

Покладемо

$$G(x) = \int_b^x \frac{ds}{g(s)},\ x \ge b.$$

Тоді отримаємо

$$G(\mu(t)) = \Phi(t),\ t \ge 0\,,$$

і розв'язок рівняння (3) матиме вигляд

$$\mu(t) = G^{-1}(\Phi(t)),\ t \ge 0, \qquad (5)$$

де G^{-1} – функція, обернена до функції G.

Дослідження поставленої задачі, як і в працях [1–6], складається з двох кроків. Перший крок – знаходження умов, при яких

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \infty\}. \qquad (6)$$

Другим кроком є визначення умов, при яких із співвідношення (6) випливає співвідношення (4).

Далі будемо розглядати СДР (1) і ЗДР (3), де θ – неперервна функція, g, φ і σ – неперервні додатні функції, такі, що (1) має єдиний і майже напевно неперервний розв'язок η і (3) має єдиний неперервний розв'язок μ. Наступне твердження містить умови, при яких виконується співвідношення (6).

Теорема 1. Нехай η є розв'язком рівняння (1), коефіцієнти якого задовольняють такі умови:

а) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty$;

б) функція $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою;

в) існує похідна g' і

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g'(\eta(t))\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0 \text{ м. н. на множині}$$

$$\{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\}.$$

Тоді маємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\}.$$

***Зауваження* 1.** Перевірка умови в) досить складна, оскільки залежить від розв'язку СДР. Тому доцільно використовувати такі достатні умови:

$$g'(x) \to 0,\ x\to\infty, \text{ і } \sup_t \frac{\theta^2(t)}{\varphi(t)} < \infty$$

або

$$\sup_x |g'(x)| < \infty \text{ і } \lim_{t\to\infty} \frac{\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

***Зауваження* 2.** При $\theta(t) = 1,\ t \ge 0$, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty$$

буде збігатись, якщо при довільному фіксованому $\delta > \frac{1}{2}$ виконується нерівність

$$\liminf_{t\to\infty} \Phi(t) t^{-\delta} > 0. \tag{7}$$

Крім того, умова (7) справедлива, якщо при $\beta < \frac{1}{2}$

$$\liminf_{u\to\infty} \varphi(u) u^{\beta} > 0.$$

У наступній теоремі розглядаються умови, за яких точним порядком росту розв'язку СДР (1) є розв'язок ЗДР (3).

Теорема 2. Нехай η є розв'язком рівняння (1), μ є розв'язком рівняння (3). Крім того, нехай виконуються всі умови теореми 1, а також умови:

а) $\lim_{t\to\infty} G(t) = \infty$;

б) $\liminf_{t\to\infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g(u)G(u)} > 0$ для всіх $c > 1$.

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\}.$$

***Зауваження* 3.** Якщо $\varphi(t) = \theta(t) = 1,\ t \ge 0$, з теорем 1 і 2 випливають відповідні результати праць [1—6].

Відзначимо, що при виконанні умов а) і б) теореми 2 функція G зберігає еквівалентність функцій (див. [3]).

Нагадаємо умови, за яких виконується умова б) теореми 2 (див. [3]).

Твердження 1. Нехай g — додатна неперервна функція, така, що виконується умова а) теореми 2 і, крім того, або:

1) $\limsup_{x\to\infty} \frac{g(x)G(x)}{x} < \infty$;

2) g не зростає при великих x;

3) існує таке $\alpha < 1$, що $0 < \inf_{x\ge 1} g(x) x^{-\alpha}$, $\sup_{x\ge 1} g(x) \times$ $\times\, x^{-\alpha} < \infty$;

4) $g^*(c) < c$ для всіх $c > 1$, де $g^*(c) = \limsup_{x\to\infty} \frac{g(cx)}{g(x)}$;

5) g є функцією правильної зміни з індексом $\alpha < 1$ (див. [7]).

Тоді виконується умова б) теореми 2.

Доведення основних результатів

Для доведення основних результатів розглянемо допоміжні твердження.

Насамперед розглянемо СДР, яке на відміну від (1) має новий доданок у правій частині:

$$d\zeta(t) = (\tilde{g}(\zeta(t))\varphi(t) + \tilde{g}_1(\zeta(t))\theta^2(t))dt +$$
$$+ \tilde{\sigma}(\zeta(t))\theta(t)dw(t),\ t \ge 0, \tag{8}$$
$$\zeta(0) \equiv b,\ b > 0,$$

де w, b — такі самі, що і в (*); ζ — розв'язок рівняння (8); $\tilde{g}_1$, θ — неперервні функції; $\tilde{g}$, φ і $\tilde{\sigma}$ — неперервні додатні функції, такі, що (8) має єдиний та майже напевно неперервний розв'язок ζ, і виконується умова (2).

Має місце така лема.

Лема 1. Нехай ζ є розв'язком рівняння (8) і нехай виконуються такі умови:

а) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}}\theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)}<\infty$;

б) $\lim_{x\to\infty}\tilde{g}(x)=K,\ K\in(0;\infty)$;

в) функція $\tilde{\sigma}$ є обмеженою;

г) $\lim_{t\to\infty}\frac{|\tilde{g}_1(\zeta(t))|\theta^2(t)}{\varphi(t)}=0$ м. н. на множині $\{\lim_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty\}$.

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\zeta(t)}{\Phi(t)}=K \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty\}.$$

Доведення. Зауважимо, що при доведенні леми використовуються міркування такі, як і при доведенні теореми 1 з [1, §17].

Оскільки

$$\zeta(t)=\zeta(0)+\int_0^t\tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds+\int_0^t\tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s)ds+$$
$$+\int_0^t\tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s),$$

то для доведення леми досить показати, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t\tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds=K \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty\}, \quad (9)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t\tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s)ds=0 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty\} \quad (10)$$

і

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t\tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s)=0 \text{ м. н.} \quad (11)$$

Доведемо рівність (9). За умови б) леми 1 для P-майже всіх $\omega\in\{\lim_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty\}$ існують такі $\varepsilon=\varepsilon(\omega)>0$ і $\tau=\tau(\omega)>0$, що $\tilde{g}(\zeta(s))>\varepsilon$ при $s\geq\tau$. Тоді маємо

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds=\int_0^\tau\tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds+$$
$$+\lim_{t\to\infty}\int_\tau^t\tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds\geq\varepsilon\lim_{t\to\infty}\left(\Phi(t)-\int_0^\tau\varphi(s)ds\right),$$

і згідно з умовою (**2**)

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds=\infty.$$

Тепер, використовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t\tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds}{\Phi(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{d}{dt}\left(\int_0^t\tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds\right)}{\frac{d}{dt}(\Phi(t))}=$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{g}(\zeta(t))\varphi(t)}{\varphi(t)}=K,$$

і, таким чином, рівність (9) доведена.

Далі, оскільки $\int_0^t|\tilde{g}_1(\zeta(s))|\theta^2(s)ds$, $t\geq0$, є зростаючою функцією, то майже напевно на множині $\{\lim_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty\}$ можливі два випадки:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t|\tilde{g}_1(\zeta(s))|\theta^2(s)ds=\infty \text{ і } \lim_{t\to\infty}\int_0^t|\tilde{g}_1(\zeta(s))|\theta^2(s)ds<\infty.$$

Розглянемо перший із них. Оскільки $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=\infty$, то за правилом Лопіталя і умовою г) леми 1 маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t|\tilde{g}_1(\zeta(s))|\theta^2(s)ds}{\Phi(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{d}{dt}\left(\int_0^t|\tilde{g}_1(\zeta(s))|\theta^2(s)ds\right)}{\frac{d}{dt}(\Phi(t))}=$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{|\tilde{g}_1(\zeta(t))|\theta^2(t)}{\varphi(t)}=0.$$

У другому випадку очевидно, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t|\tilde{g}_1(\zeta(s))|\theta^2(s)ds}{\Phi(t)}=0.$$

Отже, співвідношення (10) доведено.

Доведемо формулу (11). Для цього при фіксованому $k\geq0$ і довільному $\varepsilon>0$ розглянемо події

$$B_k=\left\{\sup_{2^k\leq t\leq2^{k+1}}\frac{1}{\Phi(t)}\left|\int_0^t\tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s)\right|>\varepsilon\right\}$$

і

$$C_k=\left\{\sup_{2^k\leq t\leq2^{k+1}}\frac{1}{\Phi(2^k)}\left|\int_0^t\tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s)\right|>\varepsilon\right\}.$$

Функція Φ монотонно зростає, тому $B_k \subset \subset C_k$. Звідси та за теоремою 1 з [1, §3] має місце оцінка

$$P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(2^k)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \frac{4}{\Phi^2(2^k)\varepsilon^2} \int_{2^k}^{2^{k+1}} E|\tilde{\sigma}(\zeta(s))|^2 \theta^2(s)ds \le$$

$$\frac{4M^2 \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds \right)}{\Phi^2(2^k)\varepsilon^2},$$

де $M = \sup_x \tilde{\sigma}(x) < \infty$.

Отже, маємо

$$P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \frac{4M^2 \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds \right)}{\Phi^2(2^k)\varepsilon^2}. \qquad (12)$$

Тепер для довільних $\varepsilon > 0$ і $m \ge 1$ розглянемо подію

$$\tilde{B}_m = \left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\},$$

та запишемо її у вигляді

$$\tilde{B}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} B_k.$$

Тоді згідно з (12) отримаємо

$$P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \sum_{k=m}^{\infty} P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le \Psi_m,$$

де

$$\Psi_m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)}, \ m \ge 1.$$

Зауважимо, що згідно з умовою а) леми 1

$$\Psi_m \to 0 \ \text{ при } \ m \to \infty.$$

Отже, маємо

$$P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le \frac{4\Psi_m M^2}{\varepsilon^2}. \ (13)$$

Якщо $\varepsilon \to \infty$, то для будь-яких $m \ge 1$ отримуємо

$$\frac{4\Psi_m M^2}{\varepsilon^2} \to 0.$$

Звідси випливає, що для будь-яких $m \ge 1$ матимемо

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} = 0,$$

тобто

$$P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| < \infty \right\} = 1.$$

Тому із співвідношення (13) та умови а) леми 1 випливає, що

$$P\left\{ \lim_{m \to \infty} \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} =$$

$$= \lim_{m \to \infty} P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \lim_{m \to \infty} \frac{4\Psi_m M^2}{\varepsilon^2} = 0$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Отже, отримаємо

$$\lim_{t \to \infty} \sup \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\, \theta(s)dw(s) \right| = 0 \ \text{ м. н.}$$

і формулу (11) доведено.

Із співвідношень (9)–(11) і (2) випливає, що

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\zeta(t)}{\Phi(t)} = K \ \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t \to \infty} \zeta(t) = \infty\}.$$

Лему 1 доведено.

У наступній лемі розглядається асимптотична поведінка розв'язку рівняння (1).

Лема 2. Нехай θ – неперервна функція, g, φ і σ – неперервні додатні функції, такі, що (1) має єдиний та майже напевно неперервний розв'язок η. Крім того, припустимо, що:

а) $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty;$

б) існує зростаюча, двічі неперервно диференційовна функція f, для якої $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)g(x)=C>0$, і $f'\sigma$ є обмеженою функцією;

в) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{|f''(\eta(t))|\sigma^2(\eta(t))\theta^2(t)}{\varphi(t)}=0$ м. н. на множині $\{\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}$.

Тоді матимемо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(\eta(t))}{\Phi(t)}=C \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}.$$

Доведення. Нехай f^{-1} є обернена до f функція. Покладемо $\zeta(t)=f(\eta(t))$. Тоді $\eta(t)=f^{-1}(\zeta(t))$. Із $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=\infty$ випливає, що $\lim\limits_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty$.

Застосовуючи формулу Іто, отримуємо

$$d\zeta(t)=[f'_x(\eta(t))g(\eta(t))\varphi(t)+$$

$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(\eta(t))\sigma^2(\eta(t))\theta^2(t)]dt+$$

$$+f'_x(\eta(t))\sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t)=$$

$$=[f'_x(f^{-1}(\zeta(t))g(f^{-1}(\zeta(t)))\varphi(t)+$$

$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(f^{-1}(\zeta(t)))\sigma^2(f^{-1}(\zeta(t))\theta^2(t)]dt+$$

$$+f'_x(f^{-1}(\zeta(t))\sigma(f^{-1}(\zeta(t)))\theta(t)dw(t).$$

Таким чином, процес ζ буде розв'язком рівняння

$$d\zeta(t)=(\tilde g(\zeta(t))\varphi(t)+$$

$$+\tilde g_1(\zeta(t))\theta^2(t))dt+\tilde\sigma(\zeta(t))\theta(t)dw(t),$$

де

$$\tilde g(x)=f'_x(f^{-1}(x))g\big(f^{-1}(x)\big),$$

$$\tilde g_1(x)=\frac{1}{2}f''_{xx}(f^{-1}(x))\sigma^2(f^{-1}(x)),$$

$$\tilde\sigma(x)=f'_x(f^{-1}(x))\sigma(f^{-1}(x)).$$

Зауважимо, що це рівняння має вигляд (8).

Оскільки за умовою б) леми 2 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)\times g(x)=C>0$, то матимемо $\lim\limits_{x\to\infty}\tilde g(x)=C>0$, а за умовою в) отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|\tilde g_1(\zeta(t))|\,\theta^2(t)}{\varphi(t)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{|f''_{xx}(\eta(t))|\sigma^2(\eta(t))\,\theta^2(t)}{\varphi(t)}=0 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}.$$

За умовою б) леми 2 функція $f'\sigma$ є обмеженою, тому $\tilde\sigma$ є теж обмеженою. Отже, виконуються всі умови леми 1 і тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\zeta(t)}{\Phi(t)}=C \text{ м. н.}$$

Оскільки $\zeta(t)=f(\eta(t))$, то з останнього співвідношення випливає доведення теореми. Отже, маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(\eta(t))}{\Phi(t)}=C \text{ м.н. множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}.$$

Лему 2 доведено.

Тепер перейдемо до доведення теореми 1.

Доведення теореми 1. Нехай $f'=\dfrac{1}{g}$. Тоді отримуємо

$$C=\lim_{x\to\infty}f'(x)g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)\frac{1}{g(x)}=1.$$

Оскільки за умовою теореми 1 функція $\dfrac{\sigma}{g}$ є обмеженою і

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g'(\eta(t))\,\theta^2(t)}{\varphi(t)}=0 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\},$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|f''(\eta(t))|\sigma^2(\eta(t))}{\varphi(t)}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sigma^2(\eta(t))}{g^2(\eta(t))}\frac{g'(\eta(t))\theta^2(t)}{\varphi(t)}=0 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}.$$

З обмеженості функції $\dfrac{\sigma}{g}$ випливає обмеженість функції $f'\sigma$. Отже, виконуються всі умови леми 2, і тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)}=1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}.$$

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. З умов а), б) теореми 2 та леми 4.3 з [3], де треба покласти $f = G$ і $f' = \dfrac{1}{g}$, випливає, що

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{G(ct)}{G(t)} > 1 \text{ для будь-якого } c > 1.$$

Отже, згідно з теоремою 3.2 з [3], функція G^{-1} зберігає еквівалентність функцій, тому з (6) маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{G^{-1}(G(\eta(t)))}{G^{-1}(\Phi(t))} = \lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м. н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \infty\}.$$

Таким чином, теорему 2 доведено.

Висновки

Результати даної статті узагальнюють результати праць [3—6].

За одержаних у статті умов розв'язок μ звичайного диференціального рівняння (3) є точним порядком росту розв'язку η стохастичного диференціального рівняння (1). Ці умови дають можливість розглядати більш загальні форми залежності коефіцієнтів зсуву та дифузії від часу.

В.В. Булдыгин, Е.А.Тимошенко

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК РОСТА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется асимптотическое поведение решений стохастических дифференциальных уравнений с коэффициентом сдвига и диффузии, которые зависят от времени $d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t)$, $\eta(0) \equiv b$. Найдены условия на функции g, φ, σ, θ, при которых точный порядок роста решения η совпадает с решением μ дифференциального уравнения $d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)dt$, $\mu(0) \equiv b$.

V.V. Buldygin, O.A. Tymoshenko

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this paper, we study the asymptotic behaviour of the solutions of some stochastic differential equations with the coefficients, dependent on time $d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t)$, $\eta(0) \equiv b$. Moreover, we define the conditions on the functions g, φ, σ, θ, under which the asymptotic behaviour of the solution η coincides with the solution μ of the differential equation $d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)dt$, $\mu(0) \equiv b$.

1. *Гихман И.И.*, *Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — К.: Наук. думка, 1968. — 354 с.
2. *Keller G.*, *Kersting G.*, *Rosler U.* On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // Z. Wahrsch. Geb. — 1984. — **68**. — P. 163—184.
3. *Булдигін В.В.*, *Клесов О.І.*, *Штайнебах Й.Г.* PRV-властивість функцій та асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2004. — № 72. — С. 63—78.
4. *Булдигін В.В.*, *Клесов О.І., Штайнебах Й.Г.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. I // Там же. — № 70. — С. 9—25.
5. *Булдигін В.В.*, *Клесов О.І.*, *Штайнебах Й.Г.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. II // Там же. — № 71. — С. 63—78.
6. *Buldygin V.V.*, *Klesov O.I.*, *Steinebach J.G.*, *Tymoshenko O.A.* On the φ-asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // Theory of stochastic processes. — 2008. — № 1. — P. 11—30.
7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 142 с.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 25 вересня 2008 року