УДК 517.9

В.О. Капустян, О.П. Когут

ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ ВІДНОСНО ЗБУРЕНЬ ОБЛАСТІ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Вступ

Математична модель оптимізаційної задачі (OCP) складається з кількох незалежних математичних об'єктів: рівняння стану, обмеження на стан системи та керування, функціонала якості. Для систем із розподіленими параметрами кожна з цих складових залежить від області Ω, на якій вивчається об'єкт керування. Отже, якщо область Ω змінюється, то приходимо до абсолютно іншої задачі оптимального керування OCP(Ω), можливо з інакшими обмеженнями, інакшим функціоналом якості та іншою крайовою задачею.

Нехай послідовність множин $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ збігається в деякому сенсі до Ω. Тоді, виходячи з класичного підходу (див., наприклад, [1—5]), оптимізаційну задачу OCP(Ω) називають стійкою відносно заданого збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області Ω, якщо послідовність оптимальних пар збурених задач OCP(Ω_ε) збігається (в певній топології) до пари, яка є оптимальною для вихідної задачі OCP(Ω).

Постановка задачі

У даній статті розглянуто клас задач оптимального керування коефіцієнтами нелінійного еліптичного рівняння з умовами Діріхле на границі з так званими узагальнено-соленоїдальними керуваннями. Для такого класу задач визначено поняття моско-стійкості (за Моско) відносно збурень області, а саме визначено так звані моско-стійкі задачі. За мету береться отримання достатніх умов такої стійкості. Показано, що основу таких умов становлять так звані топологічні збурення області, запропоновані Дансером [4]. Досліджена асимптотична поведінка послідовності множин допустимих пар збурених задач. Отримані результати можуть служити основою для побудови субоптимальних керувань у задачах з нерегулярними областями та областями складної форми.

Об'єкт дослідження

Нехай Ω є фіксованою відкритою підмножиною певної обмеженої множини $D \subset \mathbb{R}^n$ з регулярною границею.

Для заданих $z_\partial \in L_p(D)$ і $f \in L_q(\Omega)$ розглянемо задачу оптимального керування

$$L_\Omega = \int_\Omega |y(x) - z_\partial(x)|^p dx + \int_\Omega |\nabla y(x)|^p_{\mathbb{R}_n} dx \qquad (1)$$

при обмеженнях

$$\mathcal{U} \in L^{n\times n}_\infty(D),\ \mathcal{U} \in U_{\mathrm{sol}},\ y \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega), \qquad (2)$$

$$-\mathrm{div}(\mathcal{U}(x)|\nabla y|^{p-2}\ \nabla y) + $$
$$+\ a_0(x)|y|^{p-2}\ y = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad (3)$$

де $a_0(x) \ge 0$; U_{sol} — клас узагальнено-соленоїдальних матриць:

$$U_{\mathrm{sol}} =$$
$$= \left\{ \{a_{ij}\}_{1\ge i,\, j\ge n} \left| \begin{array}{l} a_{ij} \in L_\infty(D) \\ 0 < \delta \le \xi_1(x) \le a_{ij}(x) \le \\ \le \xi_2(x) \text{ майже скрізь (м. с.) у } D, \\ \exists \alpha > 0\ \ \forall \eta \in \mathbb{R}^n \\ \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)|\eta_j|^{p-2}\eta_j\eta_i \ge \\ \ge \alpha \|\eta\|^p_{\mathbb{R}_n} \text{ м. с. у } D \end{array} \right. \right\} \cap V. \quad (4)$$

Тут ξ_1, ξ_2 — задані функції з простору $L_\infty(D)$, такі, що

$$0 < \delta \le \xi_1(x) \le \xi_2(x) \quad \text{м.с. у } D, \qquad (5)$$

а множина V визначається як

$$V = \{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n]\ |\mathrm{div}\,\mathbf{u}_i \in Q_i \quad \forall i = 1, \ldots, n\},$$

де $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ — компактні множини в просторі $W_q^{-1}(D)$. Множиною допустимих розв'язків Ξ задачі (1)—(3) називатимемо сукупність пар $(\mathcal{U}, y) \in L^{n\times n}_\infty(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, які пов'язані співвідношеннями (2), (3). Через τ позначатимемо топологію в просторі $L^{n\times n}_\infty(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ як добуток $*$-слабкої топології в $L^{n\times n}_\infty(\Omega)$ та слабкої топології в просторі $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$.

Виходячи з (4), (5), легко побачити, що нелінійний еліптичний оператор у рівнянні (3) є коерцитивним, строго монотонним та демінеперервним. Цього достатньо, щоб стверджувати однозначну розв'язність крайової задачі (1)–(3) (див. [6]). Тоді, за аналогією з [7], легко показати, що задача (1)–(3) є розв'язною в класі узагальнено-соленоїдальних керувань (див. також [8]).

У даній статті досліджується асимптотична поведінка розв'язків ($\mathcal{U}_\varepsilon^{\mathrm{opt}}$, $y_\varepsilon^{\mathrm{opt}}$) задач оптимального керування

$$L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} |y_\varepsilon(x) - z_\partial(x)|^p dx +$$

$$+\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla y_\varepsilon(x)|^p_{\mathbb{R}^n} dx \to \inf, \tag{6}$$

$$-\mathrm{div}(\mathcal{U}_\varepsilon(x)\,|\,\nabla y_\varepsilon\,|^{p-2}_{\mathbb{R}^n}\,\nabla y_\varepsilon) +$$

$$+\,a_0\,|y_\varepsilon|^{p-2}\;y_\varepsilon = f \;\text{ в }\; \Omega_\varepsilon, \tag{7}$$

$$y_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\varepsilon),\;\; \mathcal{U}_\varepsilon \in U_{\mathrm{sol}} \tag{8}$$

відносно збурень $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ області $\Omega \subseteq D$. Далі ε означатиме малий параметр, що змінюється в межах строго спадної послідовності додатних чисел, які прямують до нуля. Припускаємо, що множина допустимих керувань U_{sol} і, відповідно, множина допустимих розв'язків $\Xi_\varepsilon \subset L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\varepsilon)$ непорожні для кожного $\varepsilon > 0$.

Аналіз існуючих публікацій показує (див., зокрема, праці [1, 9,10]), що типовою ситуацією для крайових задач виду (2), (3) з умовами Діріхле на границі є наявність властивості "нестійкості" відносно збурень області. У зв'язку з цим зауважимо, що метою даної статті є отримання достатніх умов на збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, при яких задача оптимального керування (а не лише відповідна крайова задача) буде задовольняти певні умови стійкості.

Допустимі збурення області

Надалі нам знадобиться поняття локальної соболевської p-ємності.

***Означення* 1.** Для компактної множини K, що міститься в довільній кулі B, ємність K у B визначається таким чином:

$$C_p(E, B) =$$

$$= \inf\left\{\int_B |\nabla\phi|^p\,dx \;\;\forall \phi \in C_0^\infty(B),\, \phi \ge 1 \text{ на } K\right\}.$$

Визначимо допустимі збурення множини Ω, йдучи за Дансером (див. [4]).

***Означення* 2.** Послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ відкритих підмножин D топологічно збігається до відкритої множини $\Omega \subseteq D$ (в позначеннях $\Omega_\varepsilon \overset{\mathrm{top}}{\longrightarrow} \Omega$), якщо існують компактна множина $K_0 \subset \Omega$ нульової p-ємності ($C_p(K_0, D) = 0$) і компактна множина $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ лебегової міри нуль, для яких справедливі такі умови:

(D1) якщо $\Omega' \subset\subset \Omega \setminus K_0$, то $\Omega' \subset\subset \Omega_\varepsilon$ для достатньо малих ε;

(D2) для довільної відкритої множини U, такої, що $\overline{\Omega} \cup K_1 \subset U$, маємо $\Omega_\varepsilon \subset U$ для достатньо малих ε.

***Означення* 3.** Нехай Ω і $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ – відкриті підмножини D. Будемо говорити, що послідовність $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ утворює топологічно допустиме збурення множини Ω (коротко, t-допустиме), якщо $\Omega_\varepsilon \overset{\mathrm{top}}{\longrightarrow} \Omega$ за означенням 2.

***Зауваження* 1.** Будемо говорити, що $\Omega \subseteq D$ є p-стійкою областю, якщо $y|_\Omega \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ для довільних $y \in W^1_p(\mathbb{R}^n)$, таких, що $y = 0$ м. с. на $\mathrm{int}\,\Omega^c$. Зауважимо, що ця властивість справедлива для достатньо регулярних областей, наприклад таких, як ліпшицеві множини [4].

Основні результати

Далі буде досліджено асимптотичну поведінку множини допустимих пар збурених задач, введено поняття стійкості задачі оптимального керування і доведено, що за допустимих збурень є стійкою не лише гранична задача Діріхле (2), (3), але й задача оптимального керування (1)–(3).

Теорема 1. Нехай Ω, $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ – відкриті підмножини D. Нехай також $\Xi_{\Omega_\varepsilon} \subset L^{n\times n}_\infty(D)\times \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega_\varepsilon)$ і $\Xi_\Omega \subset L^{n\times n}_\infty(D)\times\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ – множини допустимих розв'язків задач оптимального керування (6)–(8) і (1)–(3), відповідно. Припустимо, що Ω є p-стійкою областю і $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ – її t-допустиме збурення Ω. Тоді послідовність $\{\Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ збігається до Ξ_Ω за Моско, тобто:

(ΞM_1) для довільної пари $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$ знайдеться послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, така, що

$\mathcal{U}_\varepsilon \to \mathcal{U}$ сильно в $L_\infty^{n\times n}(D)$ і $\tilde{y}_\varepsilon \to \tilde{y}$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$;

(ΞM_2) якщо $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — числова послідовність, що збігається до нуля, а $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — послідовність, для якої

$$(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

і

$$(\mathcal{U}_k, \tilde{y}_k) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}, \psi) \text{ в } L_\infty^{n\times n}(D) \times \overset{\circ}{W}{}_p^1(D),$$

то існує функція $y = \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, така, що $y = \psi|_\Omega$ і $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$.

***Зауваження* 2.** Тут і далі через $\tilde{y}_\varepsilon$ (відповідно, $\tilde{y}$) буде позначатися тривіальне поширення на $\mathbb{R}^n$ функцій, визначених на Ω_ε (відповідно, на Ω), а саме $\tilde{y}_\varepsilon = \tilde{y}_\varepsilon \chi_{\Omega_\varepsilon}$ та $\tilde{y} = \tilde{y}\chi_\Omega$.

Доведення. Почнемо з властивості (ΞM_2). Оскільки кожна з пар $(\mathcal{U}_k, y_k)$ є допустимою для відповідної задачі (6)–(8), то легко бачити, що послідовність $\{(\mathcal{U}_k, \tilde{y}_k)\}_{\varepsilon_k} > 0$ є рівномірно обмеженою відносно норми простору $L_\infty^{n\times n}(D) \times \overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$. Отже, можемо припускати, що існує пара ($\mathcal{U}^*$, y^*), така, що (з точністю до підпослідовності, яку також будемо позначати індексом k) $(\mathcal{U}_k, \tilde{y}_k) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}^*, y^*)$ в $L_\infty^{n\times n}(D) \times \overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$. Тоді, враховуючи секвенційну $*$-слабку компактність множини U_{sol} (див. [7]), маємо $\mathcal{U}^* \in U_{\text{sol}}$.

Візьмемо як тестову функцію $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Оскільки $\Omega_{\varepsilon_k}^{\text{top}} \longrightarrow \Omega$, то для довільного $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus K_0)$ це означає, що $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_{\varepsilon_k}$ для всіх достатньо малих значень $\varepsilon_k > 0$. А з того, що множина K_0 має нульову p-ємність, випливає, що простір $C_0^\infty(\Omega \setminus K_0)$ щільний у $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Це означає, що для зафіксованої вище функції $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ існує послідовність $\{\varphi_k = \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_{\varepsilon_k})\}_{\varepsilon_k} > 0$, така, що $\tilde{\varphi}_k \to \tilde{\varphi}$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$. Оскільки ($\mathcal{U}_k$, y_k) є допустимою парою для відповідної задачі на Ω_{ε_k}, можемо записати

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} (\mathcal{U}_k |\nabla y_k|_{\mathbb{R}^n}^{p-2} \nabla y_k, \nabla \varphi_k)_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} a_0\, |y_k|^{p-2}\, y_k\, \varphi_k\, dx = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} f \varphi_k\, dx\,.$$

Отже, матимемо

$$\int_D \left(\mathcal{U}_k \left|\nabla \tilde{y}_k\right|_{\mathbb{R}^n}^{p-2} \nabla \tilde{y}_k, \nabla \tilde{\varphi}_k\right)_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D a_0\, |\tilde{y}_k|^{p-2}\, \tilde{y}_k\, \tilde{\varphi}_k\, dx = \int_D f \tilde{\varphi}_k\, dx \quad \forall \varepsilon > 0\,. \tag{9}$$

Для перевірки (ΞM_2) перейдемо до границі в інтегральній тотожності (9) при $\varepsilon_k \to 0$. Це можна зробити, використовуючи аргументи теореми 1 праці [7]. Враховуючи, що $\varphi_k = \varphi$ $\forall k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\int_D (\mathcal{U}^* \left|\nabla y^*\right|_{\mathbb{R}^n}^{p-2} \nabla y^*, \nabla\tilde{\varphi})_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_D a_0\, |y^*|^{p-2}\, y^* \tilde{\varphi} dx = \int_D f \tilde{\varphi} dx. \tag{10}$$

Залишається показати, що $y^*\big|_\Omega \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Нехай B_0 — довільна замкнена куля, яка не перетинає $\overline{\Omega} \cup K_1$. Тоді з (7), (8) випливає, що для пари $(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}}$ маємо $\tilde{y}_k = 0$ майже скрізь у B_0, як тільки параметр ε_k стає достатньо малим. Оскільки $\tilde{y}_k$ збігається до y^* сильно в $L_p(D)$, то робимо висновок, що така ж властивість має місце для граничної функції y^*. Оскільки куля B_0 вибиралася довільно, а множина K_1 має нульову лебегову міру, то $\operatorname{supp} y^* \subset \Omega$. Тоді, за теоремою Фубіні, $\operatorname{supp} y^* \subset \overline{\Omega}$. Отже, використовуючи властивості p-стійких областей (див. зауваження 1), приходимо до бажаного висновку: $y^*\big|_\Omega \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Властивість ($\Xi M_2$) доведено.

Доведемо властивість (ΞM_1). За вихідними припущеннями, множина допустимих пар Ξ_Ω для задачі (1)–(3) непорожня. Нехай $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$ — її довільний елемент. Побудуємо послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, яка буде задовольняти умову (Ξ_1) таким чином: $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U}$ $\forall \varepsilon > 0$, а $y_\varepsilon = y_{\Omega_\varepsilon}$, $\mathcal{U}$ — відповідний розв'язок крайової задачі (7), (8). Зауважимо, що такий вибір можливий, оскільки матриця $\mathcal{U}$ є допустимим керуванням для задачі (6)–(8) при кожному $\varepsilon > 0$. Покажемо, що $\tilde{y}_\varepsilon \to \tilde{y}$ сильно в $W_p^1(D)$. Слабка збіжність даної послідовності випливає із властивості (ΞM_2). Згідно з умовами, накладеними на коефіцієнти матриці $\mathcal{U}$, за еквівалентну норму простору $\mathring{W}_p^1(D)$ можна взяти таку:

$$|||y|||_{\mathring{W}_p^1(D)} = \left(\int_D (\mathcal{U}^* \mid \nabla y \mid^{p-2} \nabla y, \nabla y)_{\mathbb{R}^n} \, dx + \right.$$

$$\left. + \int_D a_0(x) \, |y|^p dx \right)^{1/p}.$$

Достатньо встановити, що

$$|||\tilde{y}_\varepsilon|||_{\mathring{W}_p^1(D)} \to |||\tilde{y}|||_{\mathring{W}_p^1(D)} \text{ при } \varepsilon \to 0. \quad (11)$$

У рівняннях (3) і (7) за тестові функції візьмемо $\tilde{y}$ і $\tilde{y}_\varepsilon$, відповідно. Переходячи до границі в (7), отримаємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_D (\mathcal{U}^* |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|^{p-2} \, \nabla \tilde{y}_\varepsilon, \nabla \tilde{y}_\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} \, dx + \int_D a_0 |\tilde{y}_\varepsilon|^p \, dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (|||\tilde{y}_\varepsilon|||_{\mathring{W}_p^1(D)})^p = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_D f \, \tilde{y}_\varepsilon \, dx =$$

$$= \int_D f \, \tilde{y} dx = \int_D (\mathcal{U}^* |\nabla \tilde{y}|^{p-2} \nabla \tilde{y}, \nabla \tilde{y})_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+ \int_D a_0 |\tilde{y}|^p \, dx = (|||\tilde{y}|||_{\mathring{W}_p^1(D)})^p \, .$$

Отже, (11) разом зі слабкою збіжністю в $\mathring{W}_p^1(D)$ дає сильну збіжність розв'язків.

Оскільки $y_{\Omega, \mathcal{U}}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(3), а $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$, то це означає, що $y = y_{\Omega, \mathcal{U}}$. Таким чином, маємо

$$(\mathcal{U}, \tilde{y}_\varepsilon) \to (\mathcal{U}, \tilde{y}) \text{ сильно в } L_\infty^{n \times n}(D) \times \mathring{W}_p^1(D)$$

Теорему доведено.

Введемо відповідне поняття.

***Означення* 4.** Будемо говорити, що задача оптимального керування (1)–(3) є моско-стійкою в просторі $L_\infty^{n \times n}(D) \times \mathring{W}_p^1(D)$ відносно збурення $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ області Ω, якщо:

(MS_1) множина допустимих пар Ξ_Ω для (1)–(3) є границею, за Моско, послідовності $\{\Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ множин допустимих пар збурених задач (6)–(8);

(MS_2) якщо $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – числова послідовність, яка збігається до нуля, а послідовність $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ є такою, що

$$(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi_{\Omega_{\varepsilon_k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

і

$$(\mathcal{U}_k, \tilde{y}_k) \xrightarrow{\tau} (\mathcal{U}, y) \text{ в } L_\infty^{n \times n}(D) \times \mathring{W}_p^1(D),$$

де $(\mathcal{U}, y|_\Omega) \in \Xi_\Omega$, то $\varliminf_{k \to \infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_k, y_k) \ge L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega)$;

(MS_3) для кожної пари $(\mathcal{U}, y) \in \Xi_\Omega$ знайдеться послідовність $\{(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$, така, що $\mathcal{U}_\varepsilon \to \mathcal{U}$ сильно в $L_\infty^{n \times n}(D)$, $\tilde{y}_\varepsilon \to \tilde{y}$ сильно в $\mathring{W}_p^1(D)$ і $\varlimsup_{\varepsilon \to 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \le L_\Omega(\mathcal{U}, y)$.

Теорема 2. Нехай Ω – відкрита підмножина D. Припустимо, що розподілення $z_\partial \in L_p(D)$ (див. (1)) є таким, що

$$z_\partial(x) =$$

$$= z_\partial(x) \chi_\Omega(x) \text{ для майже всіх } x \in D. \quad (12)$$

Нехай Ω є p-стійкою областю, а $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ – її t-допустиме збурення Ω. Тоді задача оптимального керування (1)–(3) є моско-стійкою в $L_\infty^{n \times n}(D) \times \mathring{W}_p^1(D)$.

Доведення. Перевіримо умови (MS_1)–(MS_3) означення 4.

Умова (MS_1) доведена в теоремі 1.

Нехай $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність, що задовольняє умови (MS_2), і нехай $(\mathcal{U}, y)$ є її τ-границею. Легко побачити, що для вибраного збурення $\{\Omega_{\varepsilon_k}\}_{\varepsilon_k} > 0$ множини Ω існує функція χ^*, така, що $\chi_{\Omega_{\varepsilon_k}}$ (з точністю до підпослідовності) збігається $*$-слабко до χ^* в $L_\infty(D; [0, 1])$. Тоді маємо

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \int_D \tilde{y}_k \varphi dx = \int_D y \varphi dx = \int_D \chi_\Omega y \varphi dx \quad \forall \varphi \in L_q(D).$$

З іншого боку, оскільки $\tilde{y}_k \to y$ сильно в $L_p(D)$, то

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \int_D \tilde{y}_k \varphi dx \int_D = \lim_{\varepsilon_k \to 0} \int_D \chi_{\Omega_{\varepsilon_k}} \tilde{y}_k \varphi dx = \int_D \chi^* y \varphi dx =$$

$$= \int_D \chi^* \chi_\Omega y \varphi dx \quad \forall \varphi \in L_q(D)$$

є границею добутку сильно та $*$-слабко збіжних послідовностей. Отже, матимемо

$$\chi_\Omega (1 - \chi^*) = 0 \text{ м. с. у } D. \quad (13)$$

Знову, користуючись тим, що $\tilde{y}_k \to y$ сильно в $L_p(D)$, отримаємо $|\tilde{y}_k - z_\partial|^p \to |y - z_\partial|^p$ сильно в $L_1(D)$ і

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \|\nabla \tilde{y}_k\|^p_{L^n_p(D)} \geq \|\nabla y\|^p_{L^n_p(D)},$$

оскільки норма є напівнеперервною знизу функцією відносно слабкої збіжності. Таким чином, матимемо

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} L_{\Omega_{\varepsilon_k}}(\mathcal{U}_k, y_k) =$$

$$= \underline{\lim}_{k\to\infty}\Big(\int_D \chi_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\tilde{y}_k - z_\partial|^p\, dx + \int_D |\nabla \tilde{y}_k|^p_{\mathbb{R}^n} dx\Big) \geq$$

$$\geq \int_D \chi^* |y_k - z_\partial|^p dx + \int_D |\nabla y|^p_{\mathbb{R}^n} dx =$$

$$= \{з\,(12)\} = \int_D \chi_\Omega \chi^* \, |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|^p_{\mathbb{R}^n} dx =$$

$$= \{з\,(13)\} = \int_\Omega |y - z_\partial|^p dx + \int_\Omega |\nabla y|^p_{\mathbb{R}^n} dx =$$

$$= L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega).$$

Отже, умова (MS_2) виконується. Залишається перевірити останню умову означення 4. Це легко випливає із сильної збіжності $(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) \to$ $\to (\mathcal{U}, y)$ в $L^{n\times n}_\infty(D) \times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ і властивостей (12), (13). Дійсно, в цьому випадку маємо

$$\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} L_{\Omega_\varepsilon}(\mathcal{U}_\varepsilon, y_\varepsilon) =$$

$$= \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\left(\int_D \chi_{\Omega_\varepsilon} |\tilde{y}_\varepsilon - z_\partial|^p\, dx + \int_D |\nabla \tilde{y}_\varepsilon|^p_{\mathbb{R}^n} dx\right) =$$

$$= \int_D \chi^* |y - z_\partial|^p\, dx + \int_D |\nabla y|^p_{\mathbb{R}^n} dx =$$

$$= \int_D \chi_\Omega \chi^* |y - z_\partial|^p\, dx + \int_\Omega |\nabla y|^p_{\mathbb{R}^n} dx =$$

$$= \int_\Omega |y - z_\partial|^p\, dx + \int_\Omega |\nabla y|^p_{\mathbb{R}^n} dx = L_\Omega(\mathcal{U}, y|_\Omega).$$

Теорему доведено.

Висновки

За виконання отриманих у статті достатніх умов на збурення області послідовність множин допустимих розв'язків збурених задач Моско збігається в $L^{n\times n}_\infty(D) \times \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ до множини допустимих розв'язків вихідної задачі. Щодо сформульованого поняття моско-стійкості задачі оптимального керування за вибраного типу збурень області розглянута задача є стійкою.

Подальші дослідження можуть бути направлені на отримання достатніх умов для моско-стійкості задачі керування коефіцієнтами нелінійної еліптичної крайової задачі Неймана.

В.О. Капустян, О.П. Когут

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗМУЩЕНИЙ ОБЛАСТИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрен класс задач оптимального управления в коэффициентах для нелинейного эллиптического уравнения с условиями Дирихле на границе с обобщенно-соленоидальными управлениями. Определено понятие устойчивости задачи оптимального управления относительно возмущений области. Получены достаточные условия на возмущения области, при которых устойчивость рассмотренной задачи имеет место.

V.O. Kapustyan, O.P. Kogut

THE SUFFICIENT CONDITIONS OF THE SHAPE STABILITY FOR PERTURBATION OF THE ONE CLASS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

We address the optimal control problems in the coefficients for a nonlinear elliptic equation with Dirichlet boundary conditions for generalized solenoidal controls. We define the shape stability concept for optimal control problems. Finally, we reveal the sufficient conditions for perturbation of the domain, under which the shape stability of the problem under study occurs.

1. *Bucur D.*, *Buttazzo G.* Variational Methodth in Shape Optimization Problems // Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. – Boston: Birkhä user, 2005. – P. 65.
2. *Bucur D.*, *Trebeschi P.* Shape optimization problem governed by nonlinear state equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. – 1998. – **128**. – P. 943–963.
3. *Dal Maso G.*, *Ebobisse F.*, *Ponsiglione M.* A stability result for nonlinear Neumann problems under boundary variations // J. Math. Pures Appl. – 2003. – **82**. – P. 503–532.
4. *Dancer E.N.* The effect of domains shape on the number of positive solutions of certain nonlinear equation // J. Diff. Equations. – 1990. – **87**. – P. 316–339.
5. *Daners D.* Domain perturbation for linear and nonlinear parabolic equations // Ibid. – 1996. – **129**. – Issue 2. – P. 358–400.
6. *Иваненко В.И.*, *Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 324 с.
7. *Когут О.П.* Про розв'язність задачі оптимального керування нелінійним еліптичним рівнянням з умовами Неймана на границі // Зб. наук. пр. Сер. "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Дніпропетровськ: ДНУ, 2008. – С. 85–99.
8. *Жиков В.В.*, *Козлов С.М.*, *Олейник О.Л.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 454 с.
9. *Марченко В.А.*, *Хруслов Е.Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – К.: Наук. думка, 2005. – 550 с.
10. *Dal Maso G.*, *Murat F.* Asymproric behaviour and correctors for Dirichlet problem in perforated domains with homogeneous monotone operators // Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1997. – **24**, N 4. – P. 239–290.

Рекомендована Радою навчально-наукового комплексу "Інститут прикладного системного аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
19 листопада 2008 року