УДК 517.581

О.В. Овчаренко

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ І НОВІ ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ГАУССА

Вступ

В останні роки в теорії спеціальних функцій відбувається процес розширення і узагальнення багатьох вже відомих класів функцій, які дають можливість розв'язувати нові задачі прикладної математики, фізики, квантової теорії поля, біомедицини тощо. Зокрема, узагальнюються гамма- і бета-функції [1], функції Лежандра [2], гіпергеометричні функції [3] та ін. Саме дослідженню нового (τ, β)-узагальнення функцій гіпергеометричного типу, їх застосуванню присвячено дану статтю.

При застосуванні цих функцій істотне значення має дослідження їх асимптотичної поведінки. Теорія асимптотичних розвинень функцій гіпергеометричного типу вже досліджувалась, але так і не була повністю завершена, оскільки використовувані методи не могли задовольнити розвинення функцій в околі деяких "критичних" ліній у комплексній площині. Цікавий метод дослідження асимптотичної поведінки гіпергеометричних функцій та знаходження асимптотичних розвинень здійснив Е. Райт [4].

Постановка задачі

Мета статті – розгляд (τ, β)-узагальнення функцій гіпергеометричного типу, дослідження властивості цих функцій, застосування їх у теорії дробового інтегро-диференціювання та в теорії інтегральних перетворень.

(τ, β)-Узагальнена гіпергеометрична функція і її властивості

Існує багато шляхів щодо узагальнення класичної гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z)$ [5], наприклад, запровадження нових параметрів, зміна їх кількості, узагальнення на випадок двох або більше змінних. Подамо узагальнений гіпергеометричний ряд, який отримано запровадженням p параметрів чисельника, що відіграють ту саму роль, що й параметри a і b, і q параметрів, що відіграють роль c:

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, ..., \alpha_p; z\\ \rho_1, ..., \rho_2;\end{matrix}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n ... (\alpha_p)_n z^n}{(\rho_1)_n ... (\rho_q)_n n!}, \qquad (1)$$

де $(\alpha)_n$ – символ Похгаммера; $\{\alpha_i, \rho_j\} \in C$ і $\alpha_i \neq 0,\ \rho_j \neq 0\ (i = \overline{1, p};\ j = \overline{1, q})$.

Райтом [4] було запроваджено узагальнення ряду (1) у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1 + \tau_1 n)...\Gamma(\alpha_p + \tau_p n)z^n}{\Gamma(\rho_1 + \beta_1 n)...\Gamma(\rho_q + \beta_q n)n!},$$

де $\{\tau_i, \beta_j\} \in R$, $\tau_i > 0$, $\beta_j > 0$ $(i = \overline{1, p}; j = \overline{1, q})$ і виконується умова

$$1 + \sum_{k=0}^{q}\beta_k - \sum_{m=0}^{p}\tau_m > 0. \qquad (2)$$

Вивченням властивостей цих функцій і дослідженням їх асимптотичної поведінки займалися Барнз [6], Ватсон [7], Фокс [8] та інші вчені.

Розглянемо (τ, β)-узагальнення гіпергеометричної функції Гаусса у вигляді [3]

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) \equiv {}_2F_1^{\tau,\beta}(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\times$$

$$\times\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\, {}_2\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(a,1); (c,\tau);\\ (c,\beta);\end{matrix}\right| zt^{\tau}\right]dt, \qquad (3)$$

де $\{a, b, c\} \in C$, $\mathrm{Re}c > \mathrm{Re}b > 0$, $\{\tau, \beta\} \subset R, \tau > 0,\ \beta > 0$ і виконується умова (2) для параметрів τ і β; Γ – класична гамма-функція [9], ${}_2\Psi_1$ – функція типу Райта [10].

Лема 1. При умовах існування функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}(z)$ мають місце такі рекурентні співвідношення:

1) $$c\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) -$$
$$- (c - \beta a)\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c+1; z) -$$
$$- a\beta\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1, b; c+1; z) = 0; \qquad (4)$$

2) $$\Gamma(c+\beta+1)\Gamma(b)\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) -$$
$$- \Gamma(c+\beta+1)\Gamma(b)\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1, b; c+1; z) +$$
$$+ z(c - \beta a)\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,$$
$$b+\tau; c+\beta; z) = 0; \qquad (5)$$

$$3)\ \tau c\Gamma(c+\beta)\Gamma(b)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)-$$

$$-\beta b\Gamma(c+\beta)\Gamma(b)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b+1;c+1;z)+$$

$$+z\tau\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,$$

$$b+\tau;c+\beta;z)+$$

$$+(\beta b-c\tau)\Gamma(c+\beta)\Gamma(b)\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,$$

$$b;c+1;z)=0. \qquad (6)$$

Доведемо, наприклад, співвідношення (6). Перепишемо цю рівність у вигляді

$$c\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)+\left(\frac{\beta}{\tau}b-c\right){}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b;c+1;z)-$$

$$-\frac{\beta}{\tau}b\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b+1;c+1;z)+$$

$$+z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\beta)\Gamma(b)}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b+\tau;c+\beta;z)=0.$$

Далі, використавши зображення функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ у вигляді ряду, після перетворень матимемо

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=\frac{1}{c}\left[\left(-\frac{\beta}{\tau}b+c\right){}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b;c+1;z)+\right.$$

$$+\frac{\beta}{\tau}b\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b+1;c+1;z)-z\frac{\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+\beta)\Gamma(b)}\times$$

$$\left.\times\ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b+\tau;c+\beta;z)\right]=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!}z^n\times$$

$$\times\left[\frac{\left(-\frac{\beta}{\tau}b+c\right)(a+n)}{(c+\beta n)}+\frac{\frac{\beta}{\tau}(a+n)(b+\tau n)}{(c+\beta n)}-n\right]=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!}z^n\left[\frac{ca+\beta an}{c+\beta n}\right]=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!}z^n.$$

Доведення тверджень (4) і (5) аналогічне.

Узагальнення теореми Ердеї

Доведемо узагальнення теореми Ердеї [5, 2.4(3)] для випадку (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса.

Теорема 1. Якщо виконуються умови: $\mathrm{Re}c>\mathrm{Re}\lambda>0$, $z\neq 1$, $|\arg(1-z)|<\pi$, $\mathrm{Re}c>\mathrm{Re}b>0$, $\mathrm{Re}2b>\mathrm{Re}a>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau>0,\beta>0,\tau-\beta\leq 1$, то буде справедлива формула

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma^{-1}(\lambda-b-1)}{\Gamma(c-b)\Gamma(2b-\lambda)}\times$$

$$\times\int_0^1 t^{b-1}\,{}_3F_2^{\tau,\beta}(a,b,c;2b-\lambda,c;zt^{\tau})\times$$

$$\times\ {}_2F_1(b-c+1,1;\lambda-b+1;t)dt,$$

де ${}_2F_1$ — класична гіпергеометрична функція Гаусса [9]; ${}_3F_2^{\tau,\beta}$ — узагальнена гіпергеометрична функція [8].

Д о в е д е н н я. Застосуємо метод дробового диференціювання. У формулі (3) виконаємо перетворення:

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)n!}z^n t^{\tau n}dt.$$

Використавши значення дробової похідної

$$\frac{d^{b-\lambda}t^{2b+\tau n-\lambda-1}}{dt^{b-\lambda}}=\frac{\Gamma(2b-\lambda+\tau n)}{\Gamma(b+\tau n)}t^{b+\tau n-1}$$

і дробове інтегрування частинами [11], матимемо

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1(1-t)^{c-b-1}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c+\tau n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)\Gamma(2b-\lambda+\tau n)n!}z^n\times$$

$$\times\frac{d^{b-\lambda}t^{2b+\tau n-\lambda-1}}{dt^{b-\lambda}}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(2b-\lambda)\Gamma(c-b)}\int_0^1(1-t)^{c-b-1}\frac{d^{b-\lambda}}{dt^{b-\lambda}}\times$$

$$\times\{t^{2b-\lambda-1}\,{}_3F_2^{\tau,\beta}(a,b,c;2b-\lambda,c;zt^{\tau})\}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(2b-\lambda)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{2b-\lambda-1}\,{}_3F_2^{\tau,\beta}(a,b,c;2b-\lambda,c;zt^{\tau})\times$$

$$\times\frac{d^{b-\lambda}}{dt^{b-\lambda}}(1-t)^{c-b-1}.$$

Остаточно матимемо

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(2b-\lambda)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{2b-\lambda-1}\,{}_3F_2^{\tau,\beta}(a,b,c;\,2b-\lambda,c;\,zt^{\tau})\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(b-c-1)_r}{r!}t^{r-b+\lambda}\frac{\Gamma(1-r)}{\Gamma(\lambda-b+1+r)}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma^{-1}(\lambda-b-1)}{\Gamma(c-b)\Gamma(2b-\lambda)}\times$$

$$\times\int_0^1 t^{b-1}\,{}_3F_2^{\tau,\beta}(a,b,c;\,2b-\lambda,c;\,zt^{\tau})\times$$

$$\times\,{}_2F_1(b-c+1,1;\,\lambda-b+1;\,t)dt.$$

Асимптотичні розвинення (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції

Досліджуватимемо асимптотичну поведінку (τ,β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса згідно з [4, 12].

Запишемо функцію ${}_2F_1^{\tau,\beta}(z)$ у вигляді ряду

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F(n)z^n}{\Gamma(1+n)},$$

де $F(t)=\Gamma(a+t)\Gamma(b+\tau t)\{\Gamma(c+\beta t)\}^{-1}$ і не має полюсів у точках $t=0,1,2,\ldots$

Результати, подані нижче, отримано за допомогою відомої властивості гамма-функції [4]:

$$\Gamma(\beta+ta)=\frac{(at)^{\beta+at-\frac{1}{2}}}{e^{at}}\left[\sum_{j=0}^{A}a_j t^{-j}+O(t^{-A})\right],\qquad(7)$$

де A – ціле додатне число, що не залежить від z; $|\arg t|\le\pi-\varepsilon$ і $|\arg(\beta+ta)|\le\pi-\varepsilon$; коефіцієнти a_j залежать тільки від α, β і j. Із (7) випливає така теорема.

Теорема 2. Якщо $\{\arg t, \arg(a+t), \arg(b+\tau t), \arg(c+\beta t)\subset[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]\}$, то можна обчислити значення p_0, p_1, p_2, ..., такі, що виконується нерівність

$$\left|\frac{F(t)}{\left[\frac{\tau^{\tau}}{\beta^{\beta}}(\beta-\tau)^{\beta-\tau}\right]^{t}t!}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{A-1}\frac{p_j}{\Gamma\left((\beta-\tau)t-a-b+c-\frac{1}{2}+j\right)}\right|<$$

$$<\frac{\lambda}{\left|\Gamma\left((\beta-\tau)t-a-b+c-\frac{1}{2}+A\right)\right|},\qquad(8)$$

де $\lambda\equiv\lambda(\varepsilon,\tau,\beta,a,b,c,A)$, але не залежить від змінної z. Зокрема, $p_0=\sqrt{2\pi}\tau^{b-\frac{1}{2}}(\beta-\tau)^{c-a-b}$.

Далі використовуватимемо такі позначення:

$$u=\arg z,\quad v=\arg(-z),$$

$$U=(\beta-\tau)\left(\frac{\tau^{\tau}}{\beta^{\beta}}|z|\right)^{1/(\beta-\tau)}e^{iu/(\beta-\tau)},$$

$$U_1=|U|e^{i(v+\pi)/(\beta-\tau)},\; U_2=|U|e^{i(v-\pi)/(\beta-\tau)}.\qquad(9)$$

Для асимптотичного експоненціального розвинення матимемо

$$E(s)=s^{a+b-c+\frac{1}{2}}e^{s}\left\{\sum_{j=0}^{A-1}p_s s^{-j}+O(s^{-A})\right\}.\qquad(10)$$

Запровадимо алгебричне розвинення. Визначимо його таким чином. Полюси функції $F(t)$ містяться серед полюсів функції $\Gamma(a+t)\Gamma(b+\tau t)$, тобто в точках

$$t=-l-a,\; t=-\frac{l+b}{\tau}\quad(l=0,1,2,\ldots).$$

Якщо $F(t)$ має полюс порядку r в цих точках, то запишемо

$$rM_l\omega^{-(l+a)},\; rM_l\omega^{-(l+b)/\tau}$$

і вираз для залишка в цій точці

$$-\frac{\pi F(t)\omega^t}{\sin\pi t\Gamma(1+t)}=\Gamma(-t)F(t)\omega^t.$$

Якщо точка не є полюсом функції $F(t)$, то покладемо $M_l=0$. Якщо $r>0$, M_l – поліном, що містить у собі логарифмічні члени порядку $r-1$, то M_l не залежить від $\ln\omega$.

Нехай Q, Q_1, Q_2 – цілі числа, такі, що

$$Q_1+\mathrm{Re}a<Q\le Q_1+\mathrm{Re}a+1,$$

$$Q_2+\mathrm{Re}b<Q\tau\le Q_2+\mathrm{Re}b+1.$$

Тоді, якщо $|\arg\omega|\le\pi$, запишемо вираз для асимптотичного розвинення:

$$\sum_{l=0}^{Q_1}M_l\omega^{-(l+a)}+\sum_{l=0}^{Q_2}M_l\omega^{\frac{(-l+b)}{\tau}}+O(\omega^{-Q+\delta}).$$

Якщо функція $F(t)$ має скінченну кількість полюсів, то $M_l = 0$, і, починаючи з деякого номера l, більшого за $\bar{Q}, \bar{\bar{Q}}$, можемо записати

$$D(\omega) = \sum_{l=0}^{\bar{Q}} M_l \omega^{-(l+a)} + \sum_{l=0}^{\bar{\bar{Q}}} M_l \omega^{-(l+b)/\tau}. \qquad (11)$$

Але $D(\omega)$ – скінченна сума. Тому для алгебричного розвинення маємо

$$H(\omega) = D(\omega) + O(\omega^{-Q+\delta}), \qquad (12)$$

де Q може бути як завгодно великим.

Далі подамо ряд лем, які характеризують асимптотичну поведінку ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z)$.

Лема 2. Якщо:

i) $\beta - \tau > 0$ і $|u| \le \frac{1}{2}\pi \min\{\beta - \tau, 2\} - \varepsilon$, то

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) = E(U);$$

ii) $\beta - \tau > 2$ і $|v| \le \pi$, то

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) = E(U_1) + E(U_2);$$

iii) $\beta - \tau = 2$ і $|v| \le \pi$, то

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) = E(U_1) + E(U_2) + H(-z),$$

де U, U_1, U_2, E, H – ті самі позначення, що й у формулах (9), (10), (12).

Лема 3. Якщо $0 < \beta - \tau < 2$ і якщо

1) $|v| \le \frac{1}{2}\pi(2 - \beta + \tau) - \varepsilon$, то

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) = H(-z);$$

2) $|u| \le \min\left\{\pi, \frac{3}{2}\pi(\beta - \tau) - \varepsilon\right\}$, $|v| \le \pi$, то

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) = E(U) + H(-z).$$

Лема 4. Якщо функція $F(t)$ має скінченну кількість полюсів або не має їх зовсім, то для $\beta - \tau \ge 1$ і $|v| \le \pi$, $|u| \le \pi$ виконується розвинення:

i) ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) = E(U_1) + E(U_2) + D(-z)$, $(1 < \beta - \tau < 2)$;

ii) ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z) = E(U) + D(-z)$, $(\beta - \tau = 1)$,

де D визначається формулою (11).

Застосування (τ, β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса в теорії дробового інтегро-диференціювання

Лема 5. При умовах $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\,\eta > 0$ справедливі формули

$$(I_{\eta,\alpha}^{+}\, {}_2F_1^{\tau,\beta})(x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\alpha+\eta+1)}\, {}_3F_2^{\tau,\beta}(a, b, \eta+1; c, \alpha+\eta+1; x),$$

$$(K_{\eta,\alpha}^{-}\, {}_2F_1^{\tau,\beta})(x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\alpha+\eta)}\, {}_3F_2^{\tau,\beta}(a, b, 1-\alpha-\eta; c, 1-\eta; x),$$

де ${}_3F_2^{\tau,\beta}$ – узагальнена гіпергеометрична функція, а узагальнені оператори Ердеї–Кобера мають такий вигляд [11]:

$$(I_{\eta,\alpha}^{+} f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\eta} f(t)\,dt, \qquad (13)$$

$$(K_{\eta,\alpha}^{-} f)(x) = \frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} t^{-\eta-\alpha} f(t)\,dt. \qquad (14)$$

Доведення. Розглянемо дію оператора (13) на ${}_2F_1^{\tau,\beta}$:

$$(I_{\eta,\alpha}^{+}\, {}_2F_1^{\tau,\beta})(x) =$$

$$= \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\eta}\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; t)\,dt =$$

$$= \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\eta} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n) t^n}{\Gamma(c+\beta n) n!} dt =$$

$$= \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n) n!} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\eta+n}\,dt.$$

Далі виконаємо заміну $t = \frac{y}{x}$ і обчислимо інтеграл. Остаточно матимемо

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)\Gamma(\eta+1+n)x^n}{\Gamma(c+\beta n)\Gamma(\alpha+\eta+1+n)n!}=$$

$$=\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\alpha+\eta+1)}\,{}_3F_2^{\tau,\beta}(a,b,\eta+1;c,\alpha+\eta+1;x).$$

Друге твердження доводиться аналогічно за допомогою дії оператора (14) на ${}_2F_1^{\tau,\beta}(z)$.

Лема 6. Нехай $\{\alpha,\gamma\}\subset C$, $\mathrm{Re}a>0$, $\mathrm{Re}\gamma>0$, $s\in C$, $\omega>0$. Тоді маємо

$$(I_{0+}^{\alpha}t^{\gamma-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;rt^{\omega}))(x)=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\,x^{\alpha+\gamma-1}\,{}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}(a,b,\gamma;c,\alpha+\gamma;rx^{\omega}),$$

де I_{0+}^{α} – оператор Рімана–Ліувілля [11]:

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\quad(x>0);$$

${}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}$ – функція типу Райта.

Доведення. Використовуючи зображення ${}_2F_1^{\tau,\beta}(z)$ рядом і діючи оператором I_{0+}^{α}, маємо

$$(I_{0+}^{\alpha}t^{\gamma-1}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;rt^{\omega}))(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)r^n t^{n\omega}}{\Gamma(c+\beta n)n!(x-t)^{1-\alpha}}t^{\gamma-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)r^n}{\Gamma(c+\beta n)n!}\times$$

$$\times\int_0^1 x^{\alpha+\gamma+n\omega-1}(1-y)^{\alpha-1}y^{\gamma+n\omega-1}dy=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)\Gamma(\gamma+\omega n)}{\Gamma(c+\beta n)\Gamma(\alpha+\gamma+\omega n)n!}x^{\alpha+\gamma-1}(x^{\omega}r)^n=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\,x^{\alpha+\gamma-1}\,{}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}(a,b,\gamma;c,\alpha+\gamma;rx^{\omega}).$$

Лема 7. Нехай $\{\alpha,\gamma\}\subset C$, $\mathrm{Re}a>0$, $\mathrm{Re}\gamma>0$, $s\in C$, $\omega>0$. Тоді

$$\left(I_{0-}^{\alpha}t^{-\gamma}\,{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a,b;c;\frac{r}{t^{\omega}}\right)\right)(x)=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\,x^{\alpha-\gamma}\,{}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}\left(a,b,\gamma-\alpha;c,\gamma;\frac{r}{x^{\omega}}\right),$$

де I_{0-}^{α} – оператор Рімана–Ліувілля [11]:

$$(I_{0-}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt\quad(x>0).$$

Доведення аналогічне доведенню леми 6.

Висновки

Використання методу Райта дало змогу отримати асимптотичні розвинення для (τ, β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса у всій комплексній площині. Знайдені нові властивості відкривають перспективи для широкого застосування функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a;b;c;z)$ в теорії дробового інтегро-диференціювання.

Е.В. Овчаренко

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И НОВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ГАУССА

Рассмотрено (τ, β)-обобщение функций гипергеометрического типа по Райту. Получены асимптотические разложения, новые свойства и применения этих функций в теории дробного интегро-дифференцирования.

O.V. Ovcharenko

THE ASYMPTOTIC EXPANSIONS AND NEW APPLICATION OF THE GENERALIZED HYPERGEOMETRIC GAUSSIAN FUNCTIONS

We consider the (τ, β)-generalization (according to Wright) of the functions of hypergeometric type. We also obtain the asymptotic expansions, describe new properties and consider application of these functions in the theory of fractional integration and differentiation.

1. *Virchenko N.*, *Kalla S.L.*, *al-Zamel A.* Some results on a generalized hypergeometric function // Integr. and special Functions. – 2001. – **12**, N 1. – P. 89–100.
2. *Virchenko N.O.*, *Rumiantseva O.V.* On the generalized associated Legendre functions // J. Fractional Calculus and Appl. Analysis. – 2008. – **11**, N 2. – P. 175–185.
3. *Virchenko N.* On some generalizations of the functions of hypergeometric type // Ibid. – 1999. – **2**, N 3. – P.233–244.
4. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // J. London Math. Soc. – 1935. – **10**. – P. 287–293.
5. *Вірченко Н.О.*, *Рум'янцева О.В.* Про (τ, β)-узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса та її застосування // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 12–19.
6. *Barnes E.W.* The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series // Proc. London Math. Soc. – 1907. – **5**. – P. 59–116.
7. *Watson G.N.* A class of integral functions defined by Taylor's series // Trans. Camb. Soc. – 1913. – **22**. – P. 15–37.
8. *Fox C.* The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric functions // Proc. London Math. Soc. – 1928. – **27**. – P. 389–400.
9. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1951. – 464 с.
10. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
11. *Вірченко Н.О.*, *Рибак В.Я.* Основи дробового інтегродиференціювання. Навч. пос. – К.: ТОВ "Задруга", 2007. – 364 с.
12. *Wright E.M.* On the coefficient of power having exponential singularities // J. London Math. Soc. – 1933. – **8**. – P. 71–79.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 20 листопада 2008 року