ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 519.21

О.О. Ананьєва, О.В. Іванов

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ МОДУЛІВ ПАРАМЕТРА НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ

Вступ

Метод найменших модулів оцінювання параметра є серйозним конкурентом методу найменших квадратів завдяки його властивості робастності, тобто такій, коли оцінка найменших модулів (о. н. м.) не сильно реагує на наявність аномальних значень (викидів) спостережуваної траєкторії випадкового процесу, за якою визначається оцінка [1–3].

У дослідженні [3] виявлено властивість консистентності о. н. м. параметрів нелінійної моделі регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень, а в монографії [2] знайдено умови консистентності о. н. м. параметрів у моделях із слабкозалежним випадковим шумом. Останнім часом інтенсивно вивчаються і широко застосовуються в різних галузях знань статистичні моделі з сильнозалежним випадковим шумом, тобто такі, коваріаційна функція (к. ф.) яких неінтегровна на дійсній осі R^1 (див., наприклад, [4, 5]).

Постановка задачі

Метою даної статті є отримання достатніх умов консистентності о. н. м. параметра нелінійної моделі регресії (в застосуваннях – модель “сигнал плюс шум”) з неперервним часом та сильнозалежним випадковим шумом.

Модель регресії і основні позначення

Розглянемо модель регресії

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t),\ \ t \ge 0,$$

де $g(t,\tau)$ – дійсна, неперервна за сукупністю змінних $(t,\tau) \in [0,+\infty] \times \Theta^c$ функція; $\Theta \subset R^q$ – відкрита обмежена множина, яка містить в собі істинне значення параметра θ; Θ^c – замикання в R^q множини Θ, а випадковий шум задовольняє умову:

1) $\varepsilon(t)$, $t \in R^1$, є дійсним неперервним у середньоквадратичному вимірним стаціонарним процесом, заданим на ймовірнісному просторі (Ω, F, P), $E\varepsilon(0) = 0$.

Означення **1.** Стаціонарний процес $\varepsilon(t)$, $t \in R^1$, $E\varepsilon(0) = 0$ називається сильнозалежним випадковим процесом, якщо його к. ф. виражається такою формулою:

$$B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0) = \frac{L(|t|)}{|t|^{\alpha}},\ \ \alpha \in (0,1),$$

де $L(t) \ge 0$, $t \ge 0$, – повільно змінювана на нескінченності функція (див., наприклад, [6]).

Додатково до умови 1) додамо таке припущення:

2) $\varepsilon(t)$, $t \in R^1$, є гауссівським сильнозалежним випадковим процесом, $B(0) = 1$.

Означення **2.** О. н. м. параметра $\theta \in \Theta$, отриманою за спостереженням випадкового процесу $X(t)$, $t \in [0,T]$, називається випадковий вектор $\check{\theta}_T$, для якого

$$R_T = \min_{\tau \in \Theta^c} R_T(\tau),\ \ R_T(\tau) = \int_0^T |X(t) - g(t,\tau)|\,dt.$$

Припускаючи, що функція регресії диференційовна по $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_q)$, а її частинні похідні локально інтегровні з квадратом по t, позначаємо

$$g_i(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_i} g(t,\tau),\ \ \tau \in \Theta^c,$$

$$d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t,\theta)\,dt,\ \ \varepsilon > 0,\ \ R > 0,$$

$$d_T^2(\theta) = \mathrm{diag}\{d_{iT}^2(\theta),\ i = 1,\dots,q\}.$$

Будемо вважати, що

$$\varliminf_{T \to \infty} T^{-1/2} d_{iT}(\theta) > 0,\ \ i = 1,\dots,q.$$

Ці границі, зокрема, можуть дорівнювати $+\infty$.

Позначимо далі

$$u = T^{-1/2} d_T(\theta)(\tau - \theta),\ \ \tau \in \Theta^c,$$

$$U_T^c(\theta) = T^{-1/2} d_T(\theta)(\Theta^c - \theta),$$

$$v(r) = \{x \in R^q : \|x\| < r\},$$

$$s(t,u) = g(t, \theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta) u),$$

$$\Phi_T^{(j)}(u_1,u_2) = \int_0^T |s(t,u_1) - s(t,u_2)|^j dt,$$

$$u_1, u_2 \in U_T^c(\theta), \; j = 1, 2,$$

$$\tilde{R}_T(u) = R_T(\theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta) u), \; u \in U_T^c(\theta),$$

$$\mu_j = E|\varepsilon(0)|^j, \; j \ge 1,$$

$$\check{u}_T(\theta) = T^{-1/2} d_T(\theta)(\check{\theta}_T - \theta).$$

Вважатимемо, що наступні умови виконуватимуться для достатньо великих T:

3) для будь-яких $\varepsilon > 0$, $R > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, R) > 0$, така, що

$$\sup_{\substack{u_1,u_2 \in U_T^c(\theta) \cap v^c(R) \\ \|u_1 - u_2\| \le \delta}} T^{-1} \Phi_T^{(1)}(u_1,u_2) \le \varepsilon;$$

4) для будь-якого $R > 0$ існує така константа $k = k(R) < \infty$, що

$$\sup_{u \in U_T^c(\theta) \cap v^c(R)} T^{-1} \Phi_T^{(2)}(u,0) \le k;$$

5) для будь-якого $\rho > 0$ існує таке число $a(\rho) > 0$ (умова контрасту), що

$$\inf_{u \in U_T^c(\theta) \setminus v(\rho)} T^{-1} E\tilde{R}_T(u) \ge \mu_1 + a(\rho),$$

причому існує таке $\rho_0 > 0$, що $a(\rho_0) = q_0 \mu_1 + a_0$, де $q_0 > 2$, $a_0 > 0$ — деякі числа.

У даній статті наводиться достатня умова консистентності о. н. м. параметра нелінійної моделі регресії з неперервним часом та сильнозалежним випадковим шумом.

Основний результат

Сформулюємо основний результат досліджень.

Теорема. Нехай виконано умови 1)–5). Тоді для будь-якого $\rho > 0$ маємо

$$P\{\|\check{u}_T(\theta)\| \ge \rho\} = O(B(T)) \text{ при } T \to \infty.$$

Доведення. Покладемо $b_T(\theta,u) = \tilde{R}_T(u) - E\tilde{R}_T(u)$. Очевидно, що

$$b_T(\theta,0) = \int_0^T |\varepsilon(t)| dt - T\mu_1.$$

За означенням оцінки $\check{\theta}_T$ маємо

$$\tilde{R}_T(\check{\theta}_T) \le b_T(\theta,0) + T\mu_1 \text{ м.н.}$$

(м. н.) — майже напевно).

Тоді

$$P\{\|\check{u}_T(\theta)\| \ge \rho\} \le P\{\inf_{u \in U_T^c(\theta) \setminus v(\rho)} T^{-1} \tilde{R}_T(u) \le$$
$$\le T^{-1} b_T(\theta,0) + \mu_1\}.$$

За умови контрасту 5) отримаємо

$$P\{\inf_{u \in U_T^c(\theta) \setminus v(\rho)} T^{-1} \tilde{R}_T(u) \le T^{-1} b_T(\theta,0) + \mu_1\} \le$$
$$\le P\{T^{-1} b_T(\theta,0) + \inf_{u \in U_T^c(\theta) \setminus v(\rho)} T^{-1} E\tilde{R}_T(u) -$$
$$-a(\rho) \ge \inf_{u \in U_T^c(\theta) \setminus v(\rho)} T^{-1} \tilde{R}_T(u)\} \le P\{T^{-1} b_T(\theta,0) \ge$$
$$\ge (1-\gamma) a(\rho)\} + P\{\inf_{u \in U_T^c(\theta) \setminus v(\rho)} T^{-1} \tilde{R}_T(u) -$$
$$- \inf_{u \in U_T^c(\theta) \setminus v(\rho)} T^{-1} E\tilde{R}_T(u) \le -\gamma a(\rho)\} = P^{(1)} + P^{(2)},$$

де $\gamma \in (0,1)$ — деяке число.

За нерівністю Чебишева маємо

$$P^{(1)} \le ((1-\gamma) a(\rho))^{-2} E(T^{-1} b_T(\theta,0))^2,$$
$$E(T^{-1} b_T(\theta,0))^2 = T^{-2} \int_0^T \int_0^T \operatorname{cov}(|\varepsilon(t)|, |\varepsilon(s)|) dt ds. \tag{1}$$

Розглянемо розклад функції $|x|$ за поліномами Чебишева–Ерміта в гільбертовому просторі $L_2(R^1, \varphi(x)dx)$ (тут $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — стандартна гауссівська густина):

$$|x| = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(x),$$
$$C_m = \int_{R^1} |x| H_m(x) \varphi(x) dx, m \ge 0. \tag{2}$$

Завдяки співвідношенню (див., наприклад, [2])

$$EH_m(\varepsilon(t))H_k(\varepsilon(s)) = \delta_m^k m!\, B^m(t-s)\,, \qquad (3)$$

де δ_m^k – символ Кронекера, маємо

$$\operatorname{cov}(|\varepsilon(t)|,|\varepsilon(s)|) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m^2}{m!}B^m(t-s)\,. \qquad (4)$$

Враховуючи, що $B(0)=1$, з (1)–(4) одержуємо

$$E(T^{-1}b_T(\theta,0))^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m^2}{m!}T^{-2}\int_0^T\int_0^T B^m(t-s)dtds \le$$

$$\le \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m^2}{m!}\right)T^{-2}\int_0^T\int_0^T B(t-s)dtds,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m^2}{m!} = D|\varepsilon(0)| = 1-\mu_1^2.$$

З іншого боку, за властивістю інтеграла від повільно змінюваної функції (див., зокрема, [6, 7]) при $T\to\infty$ матимемо

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T B(t-s)dtds = \int_0^1\int_0^1 B(T(t-s))dtds =$$

$$= T^{-\alpha}\int_0^1\int_0^1\frac{L(T|t-s|)}{|t-s|^{\alpha}}dtds \sim \int_0^1\int_0^1\frac{dtds}{|t-s|^{\alpha}}\frac{L(T)}{T^{\alpha}} =$$

$$= \frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}B(T),$$

тобто

$$P^{(1)} = O(B(T)). \qquad (5)$$

Очевидно, що

$$P^{(2)} \le P\{\inf_{u\in U_T^c(\theta)\setminus v(\rho)} T^{-1}b_T(\theta,u) \le -\gamma a(\rho)\}. \qquad (6)$$

Оскільки

$$\Phi_T^{(1)}(u,0) - \int_0^T|\varepsilon(t)|\,dt \le \tilde{R}_T(u) \le$$

$$\le \Phi_T^{(1)}(u,0) + \int_0^T|\varepsilon(t)|dt\,, \qquad (7)$$

$$\Phi_T^{(1)}(u,0) - T\mu_1 \le E\tilde{R}_T(u) \le \Phi_T^{(1)}(u,0) + T\mu_1, \qquad (8)$$

то, додаючи ліву частину нерівності (7) та праву частину нерівності (8), отримуємо

$$T^{-1}b_T(\theta,u) \ge -T^{-1}\int_0^T|\varepsilon(t)|dt - \mu_1. \qquad (9)$$

Разом з (6) нерівність (9) призводить до оцінки

$$P^{(2)} \le P\{T^{-1}\int_0^T|\varepsilon(t)|dt + \mu_1 \ge \gamma a(\rho)\}. \qquad (10)$$

Покладемо в (10) $\rho=\rho_0$, $\gamma=\dfrac{2}{q_0}$, де ρ_0, q_0 – числа з умови 5). Тоді (10) набуває вигляду

$$P^{(2)} \le P\left\{T^{-1}b_T(\theta,0) \ge \frac{2a_0}{q_0}\right\} = O(B(T)), \quad (11)$$

як це випливає з попередніх оцінок.

Залишилось оцінити ймовірність

$$P\{\rho_0 > \|\check{u}_T(\theta)\theta\| \ge \rho\} \le$$

$$\le P\{T^{-1}b_T(\theta,0) \ge (1-\tilde{\gamma})a(\rho)\} +$$

$$+ P\{\inf_{u\in U_T^c(\theta)\cap(v^c(\rho_0)\setminus v(\rho))} T^{-1}b_T(\theta,u) \le -\tilde{\gamma}a(\rho)\} \le$$

$$\le P\{\sup_{u\in U_T^c(\theta)\cap v^c(\rho_0)} T^{-1}|b_T(\theta,u)| \ge \tilde{\gamma}a(\rho)\} + O(B(T)),$$

де $\tilde{\gamma}\in(0,1)$ – деяке число.

Нехай $F^{(1)},\ldots,F^{(s)}\subset v^c(\rho_0)$ – замкнені множини, діаметри яких не перевищують δ, що відповідає за умовою 3) числам $R=\rho_0$, $\varepsilon=\beta a(\rho)\tilde{\gamma}/2$, $\beta\in(0,1)$ – деяке число, $\bigcup_{i=1}^{s}F^{(i)} = v^c(\rho_0)$. Виберемо точки $u^{(i)}\in F^{(i)}\cap U_T^c(\theta)$, $i=1,\ldots,s.$ Тоді матимемо

$$P^{(3)} = P\{\sup_{u\in U_T^c(\theta)\cap v^c(\rho_0)} T^{-1}|b_T(\theta,u)| \ge \tilde{\gamma}a(\rho)\} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{s}P\{\sup_{u_1,u_2\in U_T^c(\theta)\cap F^{(i)}} T^{-1}|b_T(\theta,u_1)-b_T(\theta,u_2)| +$$

$$+ T^{-1}|b_T(\theta,u^{(i)})| \ge \tilde{\gamma}a(\rho)\}.$$

Зауважимо, що

$$|b_T(\theta,u_1)-b_T(\theta,u_2)| \le |\tilde{R}_T(u_1)-\tilde{R}_T(u_2)| +$$

$$+ E|\tilde{R}_T(u_1)-\tilde{R}_T(u_2)| \le 2\Phi_T^{(1)}(u_1,u_2).$$

Тому за умовою 3) маємо

$$P^{(3)} \le \sum_{i=1}^{s} P\{T^{-1}|b_T(\theta, u^{(i)})| \ge (1-\beta)\tilde{\gamma}a(\rho)\}. \quad (12)$$

Оцінимо кожний доданок суми (12) окремо. Позначимо

$$Q(\varepsilon(t), t, u) = |\varepsilon(t) - \Delta(t, u)|,$$

$$\Delta(t, u) = s(t, u) - s(t, 0).$$

За нерівністю Чебишева маємо

$$P\{T^{-1}|b_T(\theta, u^{(i)})| \ge (1-\beta)\tilde{\gamma}a(\rho)\} \le$$

$$\le ((1-\beta)\tilde{\gamma}a(\rho))^{-2} T^{-2} Db_T^2(\theta, u^{(i)}),$$

$$T^{-2} Db_T^2(\theta, u^{(i)}) =$$

$$= T^{-2} \int_0^T \int_0^T \operatorname{cov}(Q(\varepsilon(t), t, u^{(i)}), Q(\varepsilon(s), s, u^{(i)})) dt ds.$$

Оскільки

$$EQ^2(\varepsilon(t), t, u) = E(\varepsilon(0) - \Delta(t, u))^2 =$$

$$= 1 + \Delta^2(t, u) \le C_T < +\infty$$

рівномірно по $t \in [0, T]$, $u \in F^{(i)}$, то в гільбертовому просторі $L_2(R^1, \varphi(x)\,dx)$ існує розклад

$$Q(w, t, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m(t, u)}{m!} H_m(w),$$

$$C_m(t, u) = \int_{R^1} Q(w, t, u) H_m(w) \varphi(w) dw, \quad m \ge 0.$$

Аналогічно попереднім міркуванням маємо

$$\operatorname{cov}(Q(\varepsilon(t), t, u),\ Q(\varepsilon(s), s, u)) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m(t, u) C_m(s, u)}{m!} B^m(t-s).$$

Таким чином, враховуючи, що $B(0) = 1$, отримуємо

$$T^{-2} Db_T^2(\theta, u^{(i)}) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} T^{-2} \int_0^T \int_0^T C_m(t, u^{(i)}) C_m(s, u^{(i)}) B^m(t-s) dt ds \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} T^{-2} \int_0^T \int_0^T C_m^2(t, u^{(i)}) B^m(t-s) dt ds \le$$

$$\le T^{-2} \int_0^T \int_0^T \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2(t, u^{(i)})}{m!} \right) B(t-s) dt ds \le$$

$$\le T^{-2} \int_0^T \int_0^T (1 + \Delta^2(t, u^{(i)})) B(t-s) dt ds =$$

$$= I_1(T) + I_2(T). \quad (13)$$

При отриманні останньої нерівності ми скористались тим, що

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2(t, u^{(i)})}{m!} = DQ(\varepsilon(0), t, u^{(i)}) \le$$

$$\le EQ^2(\varepsilon(0), t, u^{(i)}).$$

Як вже було з’ясовано раніше,

$$I_1 = O(B(T)). \quad (14)$$

Маємо далі (за умови 4)).

$$I_2(T) = T^{-1} \int_0^T \Delta^2(t, u^{(i)}) (T^{-1} \int_0^T B(t-s) ds) dt \le$$

$$\le T^{-1} \Phi_T^{(2)}(u^{(i)}, 0) T^{-1} \int_{-T}^{T} B(s) ds \le$$

$$\le 2k(\rho_0) T^{-1} \int_0^T B(s) ds. \quad (15)$$

З іншого боку (див., наприклад, [6]), при $T \to \infty$ маємо

$$T^{-1} \int_0^T B(s) ds = \int_0^1 B(Ts) ds = O(B(T)). \quad (16)$$

З (12), (13) випливає, що

$$P^{(3)} = O(B(T)).$$

Разом з (5) і (11) це доводить теорему.

Висновки

Отримання достатніх умов конзистентності о. н. м. параметрів нелінійної моделі регресії з неперервним часом та сильнозалежним випадковим шумом надає можливість зробити наступний важливий крок у вивченні асимптотичних властивостей о. н. м., а саме знайти асимптотичний розподіл цієї оцінки у випадку сильнозалежного випадкового шуму.

А.А. Ананьева, А.В. Иванов

КОНЗИСТЕНТНОСТЬ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ ПАРАМЕТРА НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Получены достаточные условия конзистентности оценки наименьших модулей параметра нелинейной модели регрессии с непрерывным временем и сильнозависимым гауссовским стационарным шумом.

O.O. Ananyeva, O.V. Ivanov

CONSISTENCY OF THE LEAST MODULI ESTIMATOR IN THE NONLINEAR REGRESSION MODEL

In this paper, we obtain the sufficient conditions of the least moduli estimator consistency of a parameter of the nonlinear regression model with continuous time and strong dependent Gaussian stationary noise.

1. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
2. *Иванов А.В., Леоненко Н.Н.* Статистический анализ случайных полей. – К.: Вища шк., 1986. – 216 с.
3. *Ivanov A.V.* Asymtotic theory of nonlinear regression. – Dordrecht: Kluwer AP, 1997. – 330 p.
4. *Beran J.* Statistics for Long-Memory Processes. – New York: Chapman and Hall, 1994. – 316 p.
5. *Doukhan P., Oppenheim G., Takku M.S.* Theory and application of long-range dependence. – Birkhauser, Boston, 2003. – 720 p.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
7. *Ivanov A.V., Orlovsky I.V.* L_p-estimates in nonlinear regression with long-range dependence // Theory of stochastic processes. – 2002. – **7(23)**, N 3-4. – P. 38–49.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
30 січня 2009 року