

УДК 620.179.15:004.421.2

М.В. Синьков, А.І. Закидальський,  
Є.О. Цибульська

## РОЗРОБКА НОВОГО АЛГОРИТМУ ТРИВИМІРНОЇ ТОМОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ

### Вступ

Математичні основи комп'ютерної томографії були закладені задовго до появи рентгівського комп'ютерного томографа. У 1917 р. Й. Радон запропонував метод розв'язання оберненої задачі інтегральної геометрії, що давав можливість відновлювати багатовимірні функції за їх інтегральними характеристиками [1]. На сьогодні існує багато методів розв'язання задачі відновлення внутрішньої структури об'єктів за його проєкціями. Ці методи поділяються на два основних класи: ітераційні і аналітичні.

Ітераційні методи відновлення зображень використовують апроксимацію досліджуваного об'єкта масивом комірок рівномірної щільності, що є невідомими величинами лінійних алгебричних рівнянь, вільні члени яких – проєкції. Серед цих методів найвідоміші: ART – алгебричний метод відновлення; SIRT – метод одночасного ітераційного відновлення; ILST – ітераційний метод найменших квадратів.

Аналітичні методи базуються на точних математичних розв'язках рівнянь відновлення зображень. В основі більшості з них лежить апарат перетворення Радона і перетворення Фур'є [2]. Їх, в свою чергу, можна поділити на точні і наближені. До групи точних належать методи, які використовують повні геометрії сканування (що відповідають умові Кирилова–Туя або іншій умові повноти проєкційних даних), в основу яких покладені деякі точні замкнуті математичні формули обернення. До наближених належать методи, що можуть застосовуватись до неповної геометрії сканування, при виведенні яких застосовується ряд методів екстраполяції та фільтрації неповної множини даних для компенсації небажаних артефактів.

У даній статті розглянуто найбільш відомі аналітичні методи і алгоритми тривимірної реконструкції, а також наведено розроблений авторами наближений алгоритм тривимірної реконструкції з використанням паралельних в'язових шарів.

У тривимірній реконструкції обчислювальна складність алгоритмів при відновленні матриці розмірності  $N^3$  з  $N$  наборів проєкційних даних становить  $O(N^4)$  [3]. За останні десять років було запропоновано деякі алгоритми, що мають обчислювальну складність  $O(N^3 \log N)$  [4, 5]. Подальше ж зниження цієї складності призводить до значного погіршення якості реконструкції та до зменшення просторової і щільної роздільної здатності реконструйованих зображень. При цьому зауважимо, що медична томографія потребує просторової роздільної здатності на рівні 0,5–1 мм та щільної – на рівні різниці в 1–2 % між суміжними елементами об'єкта. Промислова томографія накладає значно жорсткіші вимоги: просторова роздільна здатність має бути на рівні 0,1–0,3 мм, а щільнісна – на рівні 0,3–0,5 % різниці між суміжними елементами об'єкта.

### Постановка задачі

Метою даної статті є створення алгоритму тривимірної реконструкції для застосування в системах томографічного контролю промислових виробів, який забезпечує потрібну просторову і щільнісну роздільну здатність і має меншу кількість обчислень, ніж відомі на сьогодні алгоритми.

### Точні методи

В основі точних методів об'ємної реконструкції лежить математична формула обернення, яка дає змогу точно обчислити деяку тривимірну неперервну функцію, що зображає об'єкт через її інтеграли по променях, які перетинають задану криву. Ці інтеграли є кінчними проєкційними даними, а задана крива – траєкторією руху вершини конуса.

При виведенні формул обернення враховуються умови, які накладаються на криву – траєкторію руху джерела випромінювання. Ці обмеження є умовами повноти проєкційних даних. Вони дають теоретичну оцінку достатності входної інформації для проведення якісної реконструкції і накладають обмеження на практичну можливість застосування кожного методу реконструкції та визначають допустиму геометрію сканування. Для більшості алгоритмів, побудованих на точних формулах обернення, потрібні тільки повні геометрії сканування.

Умови повноти вперше запропоновані А.А. Кириловим [6]. На основі його оригінальних досліджень було розвинуто теоретичну оцінку реконструкції об'єкта для конусного променя, при реалізації якої на практиці потрібне двовимірне розподілення джерел випромінювання (геометрія сканування – сфера). Така схема сканування призводить до величезного обсягу даних, що значно утруднює виконання реконструкційних процедур. Більш прийнятні умови повноти обґрунтовані в праці Х. Туя [7], де було виведено формулу реконструкції в конусному промені, яка дала можливість використовувати ефективну повну геометрію сканування – дві взаємно перпендикулярні кругові траєкторії руху джерела. Ця формула належить до групи точних і тому сприяє досягненню високої якості відновлюваних зображень. Але, разом з тим, вона потребує дуже великих обчислювальних затрат, що пов'язано з необхідністю обчислення градієнта в кожній точці відповідної вершини конуса.

Значний внесок у розвиток теорії об'ємної реконструкції і розробки ефективних алгоритмів реконструкції за конічними даними зробив Б. Сміт. Він запропонував різні реконструкційні методи, які застосовувались до різних схем сканування [8]. Б. Сміт розвинув дослідження Кирилова для одновимірних лінійних інтегралів в  $n$ -вимірному дійсному просторі ( $R^n$ ). При виведенні формули обернення для цього методу припускалось, що траєкторія вершини конуса перетинає майже кожну площину, яка проходить через об'єкт, рівно  $n$  разів, а це дуже обмежує вибір геометрії сканування. Зараз відома тільки одна геометрія, яка задовольняє таку умову: це – нескінченна пряма. Б. Сміт розробив метод інверсії для нескінченно віддаленої від джерела сканування точки. Цей метод є точним тільки при теоретичній схемі сканування “нескінченна пряма”, тому при практичній реалізації отримуються значно гірші результати. Б. Сміт започаткував численні дослідження з розробки формул обернення, придатних для практичного застосування в конічній томографії.

Дослідження точних методів об'ємної реконструкції показує, що формули, які лежать в їх основі, виводились із врахуванням особливостей тривимірного перетворення Радона. У працях Клака і Дифріза проведено аналіз спільного та відмінного в цих теоріях. Ними одержана формула обернення, яка узагальнює ці важливі

теоретичні результати та є представником класу математично точних реконструкційних процедур [9]. Ця формула може бути використана в будь-якій системі з конічним променем при повному наборі проєкційних даних для геометрії сканування, що задовольняє умови повноти. Клак і Дифріз запропонували альтернативний метод прямого тривимірного оберненого проєціювання – реалізацією обернення похідної перетворення. Такий метод передбачає тривимірне зважене обернене проєціювання з використанням двовимірної фільтрації. Розроблений на основі цього методу алгоритм можна застосувати до багатьох схем сканування та одержувати непогані за якістю результати.

Повні теоретичні дослідження методів реконструкції в конусному промені були проведені Смітом і Грангеатом. З їх фундаментальної праці випливає достатня умова для точної реконструкції об'єкта в конусному промені: “якщо в кожній площині, яка перетинає об'єкт, існує хоча б одна вершина конуса, то одержаних проєкційних даних буде достатньо для реконструкції об'єкта” [10].

Розроблений Грангеатом метод точної реконструкції дає змогу отримати похідну перетворення Радона функції об'єкта за конічними проєкційними даними. Для одержання тривимірного реконструйованого зображення необхідно виконати два послідовних обернених проєціювання з фільтрацією відповідно в горизонтальних та вертикальних площинах [10]. Цей алгоритм практично реалізований і використовується в томографічних системах із конічним променем LETI. Схема сканування для збору даних є двома колами, які лежать у взаємно перпендикулярних площинах. Застосування цього методу при дослідженні об'єктів великого діаметра призводить до значних труднощів у зв'язку з різким збільшенням кількості проєкційних даних та, відповідно, обсягу обчислень.

Акселсон і Даніелсон на основі підходу Грангеата розробили метод, який для досить великого обсягу даних є значно ефективнішим за кількістю обчислень. Цей метод базується на прямому перетворенні Фур'є і побудований на його основі методиці лінограм [4, 5, 11].

Замість реконструкції в горизонтальних і вертикальних площинах використання прямого тривимірного лінограм-методу дає можливість одержати якісне зображення за значно менший час обчислень. Побудовані таким чином алгоритми мають кращі показники як за продуктивністю, так і за якістю реконструйованих зобра-

жень, що особливо стає помітно при роботі з реальними експериментальними даними. Крім того, застосування методів перетворення Фур'є для роботи з конічними проекційними даними має важливе теоретичне значення, оскільки дає змогу проводити аналіз недостатньої інформації, розробляти ефективні процедури інтерполяції, згладжування та фільтрації.

О. Кацевич розробив теоретично точний алгоритм оберненої проекції з фільтрацією за даними конусного променя для спіральної траєкторії сканування. Реконструкція за його алгоритмом складається з диференціювання проекційних даних, обчислення перетворення Гілберта по рядках диференційованих проекційних даних та оберненому проєціюванні у вікні Тама–Даніельсона [12].

Загалом, точні алгоритми забезпечують стабільність і високу якість реконструкції при умові, коли проекційні дані повні, послідовні та не зашумлені. Однак на практиці ці умови не завжди виконуються. Також необхідно брати до уваги такі фактори, як вимірювальний шум, рух об'єкта та точність цифрової обробки. Крім того, всі точні алгоритми мають відносно низьку швидкодію. Наприклад, тривимірна реконструкція об'єкта з використанням різних точних алгоритмів для матриці розміром  $256 \times 256 \times 256$  займала від 4 до 7 год роботи робочої станції SUN SPARC ULTRA-1 [13]. Тому в практичній реалізації більш придатними є наближені методи.

### Наближені методи

Існує велика група алгоритмів тривимірної реконструкції за конічними проекційними даними, які містять у собі деякі наближені обчислення і можуть бути застосовані до неповної геометрії сканування [2–5, 14]. Такі підходи, як правило, зводять тривимірну реконструкцію до набору двовимірних реконструкційних процедур, що виконуються в псевдопаралельних площинах. У цьому випадку реконструкція є точною тільки в площині, яка збігається з площиною сканування об'єкта, а з віддаленням від неї виникає помітна втрата якості одержуваного зображення. Проте алгоритми даної групи мають, як правило, високі показники за часом реконструкції. Прикладом таких методів є алгоритми Фельдкампта [14], Хермена [3] і Грангеата [10].

**Алгоритм Фельдкампта.** Запропонований Фельдкампом, Девісом і Крейсом [14] наближений алгоритм тривимірної реконструкції в

конусних променях для кругової орбіти широко застосовується на практиці. В більшості діючих томографів тривимірної реконструкції, особливо промислового призначення, використовується наближений алгоритм Фельдкампта для кругової орбіти. Його популярність зумовлена як простою реалізацією скануючої системи (потрібна тільки одна кругова орбіта руху джерела випромінювання), так і меншою порівняно з іншими алгоритмами тривимірної реконструкції кількістю обчислень.

Алгоритм Фельдкампта містить у собі згортку і обернене проєціювання із врахуванням конічного променя, що розходить. Збір даних здійснюється матрицею детекторів, жорстко зв'язаною з джерелом випромінювання. При нерухомому положенні об'єкта сканування система джерело–детектори рухається по замкненій круговій орбіті навколо об'єкта.

Розглянемо рух джерела випромінювання  $S(\lambda)$  по замкненій круговій орбіті  $\Lambda$  в горизонтальній площині. Позначимо  $S_0$  – відстань між джерелом випромінювання і матрицею детекторів у площині обертання;  $S_1$  – відстань між джерелом випромінювання та матрицею детекторів у скісному напрямку.

Реконструкція за алгоритмом Фельдкампта складається з таких етапів:

- зафіксовані матрицею детекторів у положенні  $\lambda$  проекційні дані  $Xf(p, q, \lambda)$  корегуються на ваговий коефіцієнт  $S_0/S_1$ :

$$X_w f(p, q, \lambda) = \frac{S_0}{S_1} Xf(p, q, \lambda);$$

- виконується одновимірний згортка зв'язаних даних із відповідним ядром, коефіцієнти якого залежать тільки від координати  $p$ :

$$X^F f(p, q, \lambda) = X_w f(p, q, \lambda) * h(p);$$

- обернене проєціювання є заключним етапом 3D-реконструкції.

Для спрощення запису положення точки об'єкта з координатами  $(x, y, z)$  будемо позначати вектором  $\mathbf{x}$ . Процес 3D-реконструкції в точці  $(x, y, z)$  можна описати таким виразом:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda} \frac{S_0^2}{|S_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\lambda)|} X^F f(p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), \lambda) d\lambda, \quad (1)$$

де

$$p(\mathbf{x}) = \frac{S_0(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})}{S_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\lambda)}, \quad q(\mathbf{x}) = \frac{S_0 z_x}{S_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\lambda)}. \quad (2)$$

Промінь, який проходить через воксель  $(x, y, z)$  при заданому положенні джерела випромінювання  $\lambda$ , перетинає віртуальну площину детекторів у точці з координатами  $[p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})]$ . Вектор  $\mathbf{S}(\lambda)$  є нормаллю до віртуальної площини детекторів, а одиничні вектори  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{S}(\lambda)$  взаємно ортогональні.

Величину  $|S_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\lambda)|$  в геометричному розумінні можна інтерпретувати як відстань між джерелом  $\mathbf{S}(\lambda)$  і площиною, проведеною в положенні  $\lambda$  через точку  $(x, y, z)$  паралельно віртуальній площині детекторів. Аналогічно, величина  $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\lambda)|$  є відстанню між віртуальною площиною детекторів і проведеною через точку  $(x, y, z)$  площиною, вказаною вище.

Скалярний добуток векторів  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{S}(\lambda)$  може бути записаний таким чином:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\lambda) = x_x x_s + y_x y_s + z_x z_s, \quad (3)$$

де  $x_x, y_x, z_x$  – проекції вектора  $\mathbf{x}$  по осях  $x, y, z$  нерухомої системи координат;  $x_s, y_s, z_s$  – проекції вектора  $\mathbf{S}(\lambda)$  на ті ж осі нерухомої системи координат.

Звичайно для скорочення обчислень при реалізації внутрішнього циклу змінюють одну з координат (наприклад,  $x$ ), фіксуючи значення двох інших ( $y$  і  $z$ ).

Організація обчислення відстані  $|S_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\lambda)|$  при обході вокселів по  $x$  із сталою відстанню  $\Delta x_x$  дає змогу обчислювати наступне значення відніманням деякої сталої для циклу величини  $\Delta = x_s \Delta x_x$  з визначеної раніше відстані. Отже, для обчислення наступного значення  $|S_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(\lambda)|$  потрібно тільки одне віднімання деякої константи  $\Delta = x_s \Delta x_x$ . Як видно з аналізу виразів (1)–(3), а також із [14, 4], всього для визначення внеску у відповідний воксель на даному ракурсі необхідно не менше восьми операцій з плаваючою комою (8 FLOP).

**Алгоритм перетворення конусних проекцій у проекції паралельних в'ялових шарів.** Пропонується наближений алгоритм 3D-реконструкції об'єктів, який базується на перетворенні даних

конусних проекцій у проекційні дані паралельних в'ялових шарів. Цей алгоритм належить до класу алгоритмів оберненого проєціювання з фільтрацією згорткою [15, 16]. Він складається з трьох етапів:

- 1) перетворення даних конусних проекцій у проекційні дані паралельних в'ялових шарів;
- 2) одновимірної згортки по рядках паралельних в'ялових шарів;
- 3) двовимірного обчислення обернених проекцій згорнутих даних паралельних в'ялових шарів.

Нижче наведемо більш докладний опис кожного з етапів.

1. Нехай пучок прямих, які розходяться, задано на площині (рис. 1). Вздовж кожної з прямих всередині заданого простору відомо значення інтеграла. Це дає можливість наближено визначити середні значення щільності поглинання всередині даного простору. Застосувавши будь-який числовий метод інтегрування, можна приблизно обчислити значення інтеграла вздовж заданого напрямку. Практична реалізація методу інтегрування за заданим напрямком полягає у визначенні вагових коефіцієнтів для конусних проекційних даних.

Розглянемо процес розрахунку вагових коефіцієнтів для відповідних відліків в'ялового вертикального пучка при таких умовах:

- відстань джерело–центр обертання об'єкта дорівнює  $R$  (рис. 1);
- циліндричний детектор забезпечує збір проекційних даних у кутовому секторі  $2\gamma_{\max}$ .

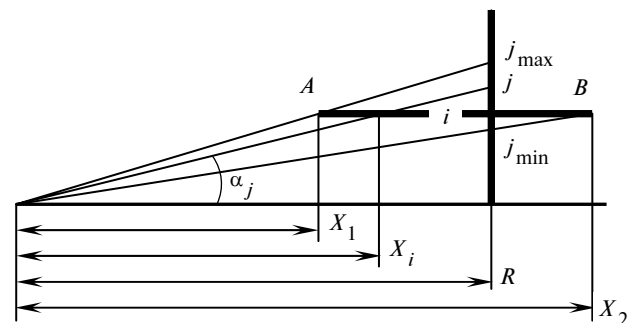


Рис. 1. Формування значення проекції паралельного шару  $AB$

За визначенням, середнє значення щільності проекції  $p(\beta, \gamma, j)$  всередині циліндричної зони реконструкції (позначимо  $p(\beta, \gamma, j)$  як

$$p(j)) \text{ дорівнює } \frac{p(j)}{x_2 - x_1} \cos \alpha_j.$$

Інтеграл лінійного ослаблення в  $i$ -му шарі вздовж прямої  $AB$  має вигляд

$$p_{\text{par}}(i) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{p(j)}{x_2 - x_1} \cos \alpha_j dx. \quad (4)$$

Зробивши заміну змінної, запишемо інтеграл (4) як

$$p_{\text{par}}(i) = \frac{j_{\min} j_{\max}}{j_{\max} - j_{\min}} \int_{j_{\min}}^{j_{\max}} \frac{p(j)}{j^2 \sqrt{1 + (kj)^2}} dj, \quad (5)$$

де  $i$  – номер паралельного шару;  $i = -i_{\max}, \dots, i_{\max}$ ;  $i_{\max} = \frac{nz - 1}{2(1 - \sin 2\gamma_{\max})}$ ;  $nz$  – кількість детекторів по вертикалі;  $j$  – номер детектора по координаті  $z$ ;  $j_{\min}, \dots, j_{\max}$  – діапазон номерів детекторів, які формують  $p(i)$ ;  $k$  – кутова відстань між детекторами:  $k = \frac{2\gamma_{\max}}{Nd_g - 1}$ ;  $Nd_g$  – половина детекторів по горизонталі.

Значення номерів детекторів по координаті  $z$  є лінійною функцією номера шару  $i$ , положення  $\gamma$  та параметра детекторної системи  $\gamma_{\max}$ . Їх величина визначається виразами

$$j_{\min} = \frac{i}{\cos(\gamma) + \sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2\gamma_{\max})^2}}, \quad (6)$$

$$j_{\max} = \frac{i}{\cos(\gamma) - \sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2\gamma_{\max})^2}}.$$

Числові значення вагових коефіцієнтів залежать від вибору зображення функції  $p(i)$  сумою інтерполюючих множників.

Розглянемо лінійну інтерполяцію.

Ваговий коефіцієнт  $w(i, j_0)$  можна подати у вигляді суми двох складових – лівої  $w-j_0_l$  і правої  $w-j_0_r$ :  $w(i, j_0) = w-j_0_l + w-j_0_r$ .

Величина  $w-j_0_l$  визначається виразом

$$w-j_0_l = m \left( \ln \left( \frac{x_2}{x_1} \right) - \frac{(j_0 - 1)(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} - \frac{1k^2(x_2 - x_1)(x_1 - 2j_0 + 2 + x_2)}{4} \right).$$

Значення параметрів  $x_1$  і  $x_2$  для  $w-j_0_l$  вибираються з умов

$$x_1 = j_0 - 1; \cdot j_{\min} \leq j_0 - 1,$$

$$x_1 = j_0; \cdot j_{\min} \geq j_0,$$

$$x_1 = j_{\min}; \cdot j_0 - 1 < j_{\min} < j_0,$$

$$x_2 = j_0 - 1; \cdot j_{\max} \leq j_0 - 1,$$

$$x_2 = j_0; \cdot j_{\max} \geq j_0,$$

$$x_2 = j_{\max}; \cdot j_0 - 1 < j_{\max} < j_0.$$

Права складова вагового коефіцієнта визначається співвідношенням

$$w-j_0_r = m \left( \frac{(j_0 + 1)(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} - \ln \left( \frac{x_2}{x_1} \right) + \frac{1k^2(x_2 - x_1)(x_1 - 2j_0 - 2 + x_2)}{4} \right).$$

Умови вибору параметрів  $x_1$  і  $x_2$  для  $w-j_0_r$  такі:

$$x_1 = j_0; \cdot j_{\min} \leq j_0,$$

$$x_1 = j_0 + 1; \cdot j_{\min} \geq j_0 + 1,$$

$$x_1 = j_{\min}; \cdot j_0 < j_{\min} < j_0 + 1,$$

$$x_2 = j_0; \cdot j_{\max} \leq j_0,$$

$$x_2 = j_0 + 1; \cdot j_{\max} \geq j_0 + 1,$$

$$x_2 = j_{\max}; \cdot j_0 < j_{\max} < j_0 + 1.$$

Масштабний коефіцієнт  $m$  обчислюється за формулою

$$m = \frac{j_{\min} j_{\max}}{j_{\max} - j_{\min}} \quad \text{або} \quad m = \frac{1}{2} \frac{i}{\sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2\gamma_{\max})^2}}.$$

Всього отримуємо  $2i_{\max} + 1$  паралельних шарів.

2. Виконаємо одновимірну згортку по рядках за допомогою швидкого перетворення Фур'є [17]. Як ядро згортки будемо використовувати функцію  $h(i) = \frac{1}{1 - (2i)^2}$ .

Оскільки в спектрі цієї функції уявна складова дорівнюватиме нулю, то множення двох комплексних спектрів зведеться до множення комплексного спектра на дійсний. Це дає змо-

гу втричі зменшити кількість арифметичних операцій із плаваючою комою при множенні спектрів.

В результаті виконання згортки одержимо набір даних згорнутих паралельних проєкцій

$$p_{\text{par}}^F(i) = p_{\text{par}}(i) * h(i),$$

де \* – знак операції згортки.

3. Обчислення обернених проєкцій для даного алгоритму значно простіше, ніж для алгоритму Фельдкампа, оскільки в задачі здійснено перехід від тривимірного оберненого проєціювання до двовимірного. Величина внеску в точку матриці  $P(x, y, z)$  при заданому положенні системи джерелодетектори визначається виразом

$$P(x, y, z) = \frac{R^2}{L(x, y, \beta)^2} p_{\text{par}}^F(\beta, \gamma(x, y, \beta), z),$$

де

$$L(x, y, \beta) = \sqrt{(R + x \cos \beta + y \sin \beta)^2 + (-x \sin \beta + y \cos \beta)^2},$$

$$\gamma(x, y, \beta) = \arctg \left[ \frac{(-x \sin \beta + y \cos \beta)}{(R + x \cos \beta + y \sin \beta)} \right].$$

Вага відліку проєкції  $\left(\frac{R}{L}\right)^2$  і її кутова ад-

реса для даного внеску не залежать від координати  $z$ , і тому для зменшення тригонометричних обчислень доцільно зробити обчислення внесків у точку матриці з внутрішнім циклом по  $z$ .

Як і алгоритм Фельдкампа, алгоритм об'ємної реконструкції на основі перетворення конусних проєкційних даних у набір паралельних в'ялових шарів має такі важливі властивості:

- забезпечує точну реконструкцію центрального шару ( $z = 0$ ), оскільки в цьому випадку він ідентичний в'яловому алгоритму реконструкції. З віддаленням від центрального шару похибки реконструкції зростають;

- забезпечує точну об'ємну реконструкцію будь-якого шару  $z_{\text{min}} < z < z_{\text{max}}$  за умови гомогенності об'єкта по довжині (тобто  $f(x, y, z) = f(x, y)$ );

- дає змогу використовувати надлишковість проєкційних даних при обертанні об'єкта на кут  $2\pi$  для зменшення кута охоплення об'єкта системою джерело–детектори. Отже,

можна забезпечити томографічне дослідження об'єктів більшого розміру без значного збільшення часу обробки даних;

- забезпечує обробку проєкційних даних конвейерним методом, тобто обробку даних одержаної проєкції можна проводити в той час, коли виконується наступне сканування.

Як видно з (5), (6), у формуванні паралельної проєкції  $i$ -го шару для заданого  $\gamma$  беруть участь проєкції з номерами від  $j_{\text{min}}$  до  $j_{\text{max}}$ . Для оцінки кількості проєкцій  $\Delta j$  візьmemo:  $\Delta j \cong j_{\text{max}} - j_{\text{min}}$ .

Використовуючи (6), одержуємо наближену оцінку  $\Delta j(i, \gamma, \gamma_{\text{max}})$  для  $i$ -го шару:

$$\Delta j(i, \gamma, \gamma_{\text{max}}) = i \cdot 2 \frac{\sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2\gamma_{\text{max}})^2}}{\cos(2\gamma_{\text{max}})^2}.$$

Всього у формуванні паралельних проєкцій для шарів  $i = 1, \dots, i_{\text{max}}$  використовується проєкцій:

$$\sum_{i=1}^{i_{\text{max}}} \Delta j(i, \gamma, \gamma_{\text{max}}) = i_{\text{max}}(1 + i_{\text{max}}) \frac{\sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2\gamma_{\text{max}})^2}}{\cos(2\gamma_{\text{max}})^2}. \quad (7)$$

Визначимо  $i_{\text{max}}$  як максимальну відстань паралельного шару від площини сканування. Будемо вважати, що при даному числі детекторів по координаті  $z$  кожний промінь, який перетинає  $i_{\text{max}}$ -шар, реєструється детекторною системою. Тоді матимемо

$$i_{\text{max}} = \frac{1}{2}(Ndg - 1)(1 - \sin(2\gamma_{\text{max}})). \quad (8)$$

Порівняємо реконструкцію всіх шарів  $i = -i_{\text{max}}, \dots, i_{\text{max}}$  при використанні алгоритму Фельдкампа і алгоритму з перетворенням у паралельні шари. Реконструкція для паралельних шарів  $i = 1, \dots, i_{\text{max}}$  відповідає при використанні алгоритму Фельдкампа згортці  $\frac{1}{2}(Ndg - 1)$  шарів.

На основі (7) із врахуванням (8) і при умові  $nz \gg 1$  одержимо значення трудомісткості перетворення в паралельні шари відносно трудомісткості згортки:

$$fprsw = \frac{(1 - \sin(2\gamma_{\max}))^2 \sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2\gamma_{\max})^2}}{2 \cos(2\gamma_{\max})^2}. \quad (9)$$

Як видно з (9), значення трудомісткості залежить від  $\gamma$ . Усереднивши (9) по  $\gamma$ , одержимо оцінку середнього значення трудомісткості:

$$fprsw-sr = \frac{[\sin(2\gamma_{\max}) + 4\sqrt{\cos(\gamma_{\max})^2 - \cos(2\gamma_{\max})^2}]}{12 \cos(2\gamma_{\max})^2} \times (1 - \sin(2\gamma_{\max}))^2. \quad (10)$$

Оцінимо обчислювальні затрати при виконанні згортки паралельних шарів.

Для одержання згорнутих значень проєкцій паралельних шарів необхідно додатково виконати перетворення проєкційних даних конусного променя. Однак в цьому випадку згортка буде виконуватись над послідовностями такої ж довжини, але меншого числа рядків. Об'ємна реконструкція за методом Фельдкамп передбачає згортку проєкційних даних всіх  $nz$  рядків матричного детектора, а за методом перетворення в паралельні шари – згортку  $2i_{\max} + 1$  рядків. Таким чином, обсяг обчислень при згортці для паралельних шарів буде становити частину  $\frac{2i_{\max} + 1}{nz}$  обсягу обчислень при згортці за Фельдкампом. В результаті, із врахуванням додаткових перетворень для одержання згорнутих значень проєкцій паралельних шарів, необхідно виконати всього деяку частину  $\chi$  операцій згортки за Фельдкампом. На основі (8) і (10) при умові  $nz \gg 1$  одержимо

оцінку відносних витрат залежно від значення  $\gamma_{\max}$ :

$$\chi = 1 - \sin(2\gamma_{\max}) + \frac{\sin(2\gamma_{\max})(1 - \sin(2\gamma_{\max}))^2}{2 \cos(2\gamma_{\max})^2}.$$

В результаті проведеного аналізу можна зробити висновок, що сумарні обчислювальні витрати на перетворення конусних проєкцій у паралельні шари та їх згортку менші, ніж витрати на згортку в алгоритмі Фельдкамп.

Оцінка сумарної кількості обчислень даного алгоритму показала, що всього для визначення внеску у відповідний воксель на кожному ракурсі необхідно виконати приблизно 2,5 операцій з плаваючою комою (2,5 FLOP).

#### Порівняння обчислювальної складності тривимірних алгоритмів реконструкції

Дані про сумарну кількість арифметичних операцій із плаваючою комою на один внесок проєкційних даних для різних алгоритмів реконструкції наведено в таблиці. При цьому розглянуто як точні, так і наближені алгоритми. До точних алгоритмів належать: RADON, RADONZERO – алгоритми Грангеата, які базуються на перетворенні Радона [4, 10]; DC – алгоритм Дифріза і Клака [9]; до наближених – FDK0, FDK1 – алгоритми Фельдкамп, Девіса, Крейса [4, 14]; MIXED – алгоритм Дифріза і Клака для неповної геометрії сканування [4]; PR-PAR – поданий авторами даної статті алгоритм з перетворенням конусних проєкцій у паралельні віялові шари [15–17].

З таблиці видно, що алгоритм з перетворенням конусних проєкцій у проєкції паралельних віялових шарів забезпечує меншу кількість операцій із плаваючою комою порівняно з іншими реконструкційними алгоритмами.

Таблиця. Кількість операцій із плаваючою комою на один внесок проєкційних даних

Алгоритм	Кількість операцій з розмірністю проєкцій						
	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$
FDK0	19,00	18,14	17,65	17,36	17,20	17,11	17,06
FDK1	10,75	9,53	8,84	8,46	8,25	8,13	8,07
RADON	36,84	33,42	31,71	30,86	30,43	30,21	30,11
RADONZERO	52,38	42,34	36,75	33,66	31,98	31,06	30,57
MIXED	39,91	27,30	19,82	15,50	13,04	11,67	10,91
DC	36,88	33,06	30,84	29,58	28,88	28,48	28,26
PR-PAR	4,43	3,38	2,78	2,44	2,25	2,14	2,09

### Моделювання томографічної реконструкції

Розроблений алгоритм тривимірної реконструкції реалізовано в програмному комплексі (ПК) моделювання томографічної реконструкції, який створений за допомогою мови C++ і розрахований на роботу на персональних комп'ютерах з ОС Windows. ПК має графічний інтерфейс і дає змогу в інтерактивному режимі встановлювати параметри томографічної системи, формувати математичні фантоми з елементарних геометричних фігур, отримувати проєкційні дані за цими фантомами та проводити реконструкцію при різних режимах сканування. В результаті роботи ПК отримуємо матрицю розподілу щільності в усіх точках об'єкта.

Перевірка роботи алгоритму реконструкції проводилась за допомогою стандартних математичних фантомів. На рис. 2 наведено результати реконструкції фантома Шеппа–Логана, який складається з 12 еліпсоїдів, що мають різні розміри і щільність. Цей фантом вирізняється великим динамічним діапазоном зміни щільностей, причому поряд з областю з великим перепадом щільностей знаходяться області з досить незначними перепадами. Такий фантом висуває жорсткі вимоги до алгоритму реконструкції. На рис. 2 показано перетини реконструйованого тривимірного об'єкта трьома ортогональними площинами.

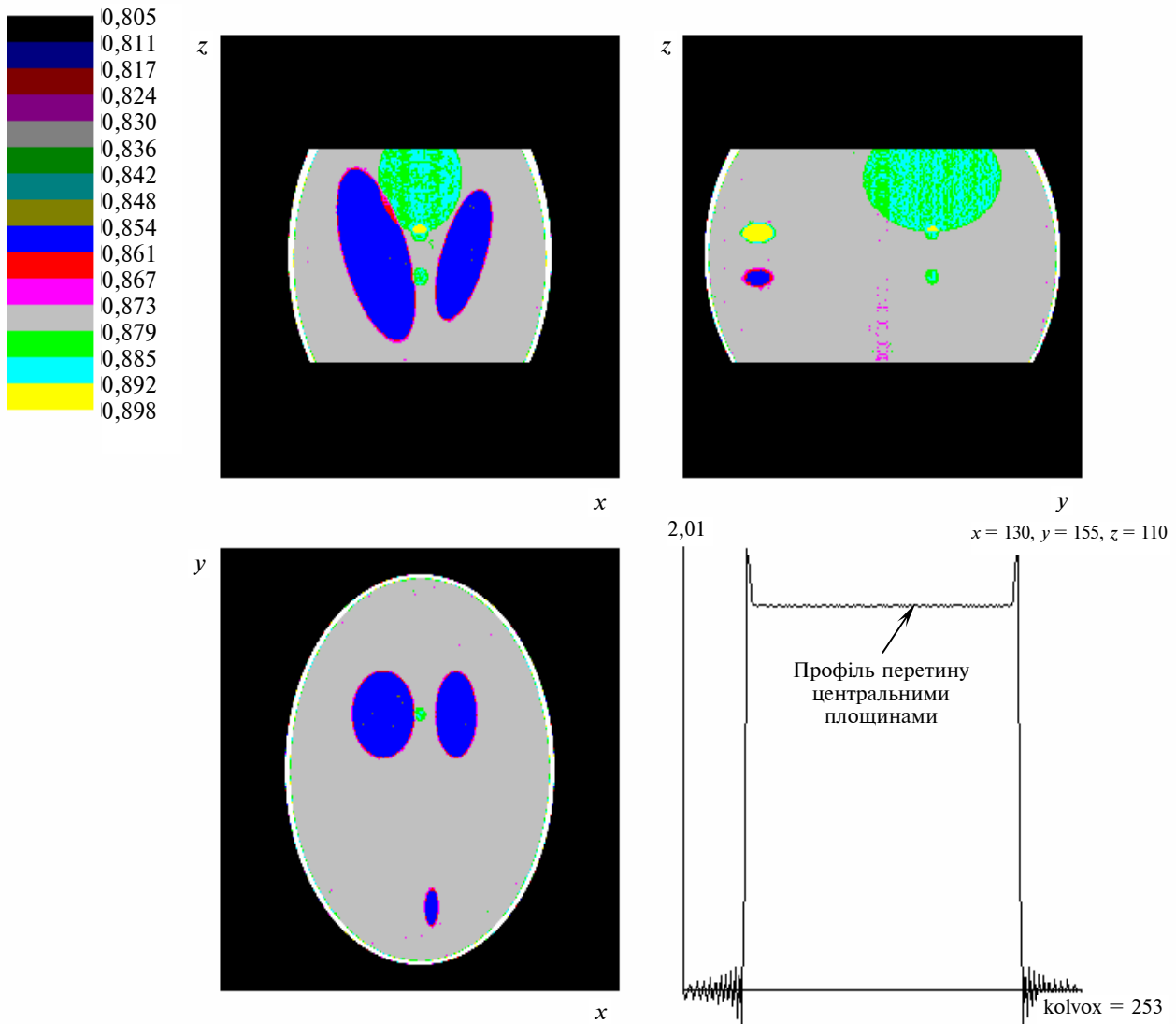


Рис. 2. Результат реконструкції фантома Шеппа–Логана за допомогою запропонованого авторами алгоритму. Перетини ортогональними площинами  $x = 130$ ,  $y = 155$ ,  $z = 110$ . Інтервал щільності: 0,805–0,898. Параметри сканування: кількість проєкцій – 500; розмір матриці реконструйованого об'єкта –  $253 \times 253 \times 113$ ; максимальна щільність – 2,01



Як показують експерименти, розроблений алгоритм реконструкції забезпечує достатньо високу просторову роздільну здатність (близько 0,3 % від розміру зони відновлення) та щільнісну роздільну здатність (різниця щільності в 0,2 % на об'ємі в 1–2 % від розміру зони відновлення). При цьому час обробки даних за вказаних розмірів об'єкта на персональному комп'ютері Р-IV (3 МГц, 1 Гб оперативної пам'яті) становив близько 5 хв.

### Висновки

Дослідження двох основних типів алгоритмів томографічної реконструкції зображень – точних і наближених – показали, що точні алгоритми забезпечують потрібну високу просторову та щільнісну роздільну здатність, але при цьому продуктивність їх така, що отримання результату потребує значного часу розрахунків, і тому використання їх малоефективне; наближені алгоритми забезпечують більш продуктивну обробку даних, однак отримання якісного результату також потребує досить значного часу обчислень.

Запропонований авторами новий наближений алгоритм тривимірної реконструкції з перетворенням даних конусних проєкцій у проєкційні дані паралельних в'ялових шарів, оснований на методи інтегрування в заданому напрямку, забезпечує перехід від тривимірного до двовимірного оберненого проєціювання та обробку даних кожної проєкції паралельно із скануванням наступної проєкції, що дає можливість проводити реконструкцію практично в режимі реального часу.

Порівняння загальної кількості операцій з плаваючою комою засвідчило, що розроблений алгоритм має значно меншу кількість операцій відносно інших відомих реконструкційних алгоритмів при забезпеченні високої просторової та щільнісної роздільної здатності. Даний алгоритм, як і практично всі інші на сьогодні алгоритми реконструкції, розрахований на дослідження об'єктів, розміри яких не перевищують розміри матриці детекторів комп'ютерного томографа.

В подальшому авторами передбачається розробка спеціалізованих алгоритмів для дослідження об'єктів із розмірами, в кілька разів більшими за розміри матриці детекторів.

М.В. Синьков, А.И. Закидальский, Е.А. Цыбульская  
РАЗРАБОТКА НОВОГО АЛГОРИТМА ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ

Рассмотрены алгоритмы трехмерной томографической реконструкции, приведена их классификация. Предложен алгоритм трехмерной реконструкции с преобразованием данных конусных проециций в проекции параллельных веерных слоев. Показано, что этот алгоритм позволяет повысить производительность трехмерной реконструкции за счет уменьшения вычислений при свертке и упрощения обратного проецирования.

M.V. Sinkov, A.I. Zakydalskiy, Ye.O. Tsybul'ska  
ON CREATING THE NEW 3D TOMOGRAPHY RECONSTRUCTION ALGORITHM

We consider the algorithms of three-dimensional tomography reconstruction and suggest their classification. Likewise, we propose the 3D-reconstruction algorithm with the transformation of the cone-beam projection to the parallel fan-beams projection. Finally, we show that this algorithm allows increasing the volumetric reconstruction efficiency at the expense of decreasing the calculations at convolution and simplifying the back projection.

1. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten / Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Math.–Phys. Kl., 1917. – 69. – P. 262–267.
2. Введение в современную томографию / К.С. Терновой, М.В. Синьков, А.И. Закидальский и др. – К.: Наук. думка, 1983. – 232 с.
3. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии / Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 350 с.
4. Jacobson C. Fourier Methods in 3D Reconstruction from Cone-Beam data: Department of Electrical Engineering: Dissertation N 427. – Linkoping Studies in Science and Technology, Sweden, 1996. – 230 p.

5. *Turbell H.* Cone-Beam Reconstruction Using Filtered Backprojection: Dissertation № 672. – Linköping Studies in Science and Technology, Sweden, 2001. – 189 p.
6. *Хаммерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. – М.: Мир, 1990. – 280 с.
7. *Tuy H.* An inversion formula for cone-beam reconstruction // *SIAM J. Appl. Math.* – 1983. – **43**. – P. 546–552.
8. *Smith B.D.* Image reconstruction from cone-beam projections: necessary and sufficient conditions and reconstruction method // *IEEE Trans. Med. Imaging.* – 1985. – **4**. – P. 4–28.
9. *Clack R., Defrise M.* Cone-beam reconstruction by use of Radon transform intermediate functions // *J. Opt. Soc. Am.* – 1994. – **A-11**. – P. 50–62.
10. *Grangeat P.* Analyze d'un système d'Imagerie 3D par reconstruction á partir de radiographies X en géométrie conique: These de doctorat / Ecole Nationale Supérieure des Telecommunications, 1987. – 458 p.
11. *Andersson H., Magnusson-Seger M., Mengerd M.* Tomography for Large Objects // *SSAB-2001, Norrköping, Proceedings of the SSAB Symposium on Image Analysis.* – 2001. – P. 109–112.
12. *Katsevich A.* An inversion algorithm for Spiral CT // *Proc. of the 2001 International Conference on Sampling Theory and Applications, May 13–17, 2001* // A.I. Zayed, ed. – Florida: University of Central Florida, 2001. – P. 261–265.
13. *Kudo H., Noo F., Defrise M.* Simple Quasi-Exact Filtered Backprojection Algorithm for Long-Object Problem in Helical Cone-Beam Tomography // *IEEE Transactions on Medical Imaging.* September 2000. – 2000. – **19**, Issue 9. – P. 902–921.
14. *Feldkamp L.A., Davis L.C., Kress J.W.* Practical cone-beam algorithm // *J. Opt. Soc. Am.* – 1984. – **1(6)**. – P. 612–619.
15. *Закидальский А.И., Цыбульская Е.А.* Преобразование конусного пучка в квазипараллельные слои веерного типа для повышения производительности реконструкции томографических изображений // *Реєстрація, зберігання і обробка даних.* – 2004. – **6**, № 2. – С. 27–32.
16. *Синьков М.В., Закидальский А.И., Цыбульская Е.А.* Алгоритмическая и программная реализация алгоритма преобразования конусных проекций // *Там же.* – 2006. – **8**, № 1. – С. 31–33.
17. *Закидальский А.И., Цыбульская Е.А.* Быстрая свертка на основе БПФ // *Там же.* – 2005. – **7**, № 3. – С. 62–70.

Рекомендована Радою  
приладобудівного факультету  
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції  
20 березня 2009 року