

УДК 519.21

О.В. Іванов, І.В. Орловський

ПРО ЄДИНІСТЬ M -ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕСІЇ**Вступ**

Починаючи з первинних праць П. Х'юбера [1, 2] в статистиці вивчаються так звані M -оцінки параметрів статистичних моделей, які певним чином узагальнюють класичні оцінки максимальної вірогідності. Смысл розгляду таких оцінок полягає в тому, що M -оцінки є стійкими відносно аномальних спостережень (викидів), присутніх у вибірці. Цей ефект досягається за рахунок певного вибору функції втрат, за якою будується M -оцінка.

Асимптотичні властивості M -оцінок параметрів лінійних та нелінійних моделей регресії з неперервним часом та випадковим шумом, що задовольняє умову сильної залежності, було досліджено в працях [3–5] для моделей з неперервним часом.

У статтях [6, 5] розглядалися асимптотичні властивості M -оцінок параметрів нелінійних моделей регресії з неперервним часом та слабкозалежним випадковим шумом.

Обрана тематика є важливою частиною в дослідженнях асимптотичних властивостей M -оцінок. При дослідженні асимптотичної нормальності цих оцінок важливою частиною доведення є використання теореми Брауера про нерухому точку [7]. Даний підхід бере свій початок із класичних праць Х'юбера [2]. Але головною вимогою застосування цієї теореми є єдиність розв'язку системи рівнянь, яка визначає M -оцінку. Для нелінійних моделей регресії з дискретним часом та незалежними однаково розподіленими похибками спостережень питання єдиності M -оцінок розглядалось у статті [8].

Постановка задачі

Метою даної статті є отримання умов, за яких M -оцінка невідомого параметра в нелінійній регресійній моделі з неперервним часом та сильно- або слабкозалежним випадковим шумом є єдиним, в певному асимптотичному розумінні, розв'язком системи нормальних рівнянь, які її визначають. У статті

досліджено M -оцінки, які побудовано за допомогою гладких функцій втрат. Останні, як і їх недиференційовні аналоги, широко використовуються в розв'язанні задач обробки статистичних даних.

Попередні позначення

Розглянемо модель регресії

$$X(t) = g(y(t), \theta) + \varepsilon(t), t \geq 0, \quad (1)$$

де $g(y, \tau)$ – дійсна неперервна за сукупністю змінних $(y, \tau) \in Y \times \Theta^c$ функція; $Y \subset R^m$ – компактна область планування регресійного експерименту (1); $\Theta \subset R^q$ – відкрита обмежена множина параметрів, яка містить θ ; Θ^c – замикання в R^q множини Θ . Детерміновану борелівську функцію $y(\cdot) : R_+ \rightarrow Y$, $R_+ = [0, \infty)$, будемо називати планом регресійного експерименту. Відносно випадкового процесу $\varepsilon(t)$ припустимо, що:

1) $\varepsilon(t), t \in R^1$ є дійсним неперервним у середньоквадратичному вимірним стаціонарним гауссівським процесом із нульовим середнім, який визначено на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Для оцінювання невідомого параметра $\theta \in \Theta$ будемо використовувати M -оцінки.

Означення 1. M -оцінкою невідомого параметра $\theta \in \Theta$, одержаною за спостереженнями $X(t), t \in [0, T]$, виду (1) та неперервною функцією втрат $\rho(x), x \in R^1$, називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(X(t), t \in [0, T]) \in \Theta^c$, для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \inf_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau),$$

$$Q_T(\tau) = \int_0^T \rho(X(t) - g(y(t), \tau)) dt.$$

Якщо функція регресії та функція втрат є диференційовними, то M -оцінка $\hat{\theta}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\nabla Q_T(\tau) = 0, \quad (2)$$

де $\nabla Q_T(\tau)$ – градієнт функції $Q_T(\tau)$.

При дослідженні асимптотичних властивостей M -оцінок, таких, як асимптотична

нормальність, виникає потреба в єдиності розв'язку системи (2), що визначає M -оцінку, в певному асимптотичному розумінні. Це пов'язано з тим, що важливою частиною доведень таких властивостей є застосування теореми Брауера про нерухому точку [7]. У статті виводяться достатні умови єдиності розв'язку цієї системи.

Асимптотична єдиність M -оцінки за ймовірністю

Припустимо, що $g(y, \tau)$ – двічі неперервно диференційовна по $\tau \in \Theta^c$ функція. Введемо позначення:

$$g_i(y, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_i} g(y, \tau),$$

$$g_{il}(y, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_l} g(y, \tau),$$

$$i, l = 1, \dots, q;$$

$$J_T(\theta) = (J_T^{il}(\theta))_{i,j=1}^q = \left(\frac{1}{T} \int_0^T g_i(y(t), \theta) g_l(y(t), \theta) dt \right)_{i,j=1}^q ;$$

$\lambda_{\min}(A)$ – найменше власне число симетричної матриці A ;

$$\Phi_T^{il}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T (g_{il}(y(t), \tau_1) - g_{il}(y(t), \tau_2))^2 dt,$$

$$i, l = 1, \dots, q, \tau_1, \tau_2 \in \Theta^c.$$

Буквами k з верхніми або нижніми індексами позначатимемо додатні константи. Введемо умови:

2) функції $g_i(y, \tau), g_{il}(y, \tau), i, l = 1, \dots, q$, є обмеженими функціями:

$$\sup_{y \in Y} \sup_{\tau \in \Theta^c} |g_i(y, \tau)| \leq k^i < \infty,$$

$$\sup_{y \in Y} \sup_{\tau \in \Theta^c} |g_{il}(y, \tau)| \leq k^{il} < \infty;$$

3) $\lambda_{\min}(J_T(\theta)) \geq \lambda_* > 0$ при достатньо великих T (при $T > T_0$);

$$4) \frac{1}{T} \Phi_T^{il}(\tau_1, \tau_2) \leq k_{il} \|\tau_1 - \tau_2\|^2, \quad i, l = 1, \dots, q,$$

$\tau_1, \tau_2 \in \Theta^c$ при $T > T_0$.

Означення 2. Вимірна функція $L(\cdot) : R_+ \rightarrow R_+$ називається повільно змінною (п.з.ф.) (на нескінченності), якщо для довільного $\lambda > 0$ виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda t)}{L(t)} = 1.$$

Накладемо на випадковий процес $\varepsilon(t)$ умову:

5) випадковий процес $\varepsilon(t), t \in R^1$, має кореляційну функцію $B(t) = E\varepsilon(0)\varepsilon(t), B(0) = 1$, що задовольняє одну з умов:

$$(i) B(\cdot) \in L_1(R^1) \text{ і } B = \int_{-\infty}^{\infty} |B(t)| dt;$$

$$(ii) B(t) = \frac{L(|t|)}{|t|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \text{ де } L(t) \text{ –}$$

п.з.ф.;

6) функція $\rho(x), x \in R^1$ є двічі неперервно диференційовною, а її похідні $\rho'(x) = \psi(x)$ та $\rho''(x) = \psi'(x)$ мають такі властивості:

$$(i) \sup_{x \in R} |\psi(x)| = k_\psi < \infty, \quad \sup_{x \in R} |\psi'(x)| = k_{\psi'} < \infty;$$

$$(ii) E\psi(\varepsilon(0)) = 0;$$

$$(iii) E\psi'(\varepsilon(0)) \neq 0;$$

(iv) для довільних $x, h \in R^1$ та деякої константи $\kappa < \infty$

$$|\psi'(x+h) - \psi'(x)| \leq \kappa |h|.$$

Відносно M -оцінки припустимо, що:

7) $\hat{\theta}_T$ є слабкоконтзистентною оцінкою θ , тобто для довільного $r > 0$ маємо

$$P\{\|\hat{\theta}_T - \theta\| > r\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Достатні умови слабкої контзистентності M -оцінок параметрів нелінійних моделей регресії містяться в працях [9, 10].

Сформулюємо основний результат статті.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1)–7).

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $T_0 = T_0(\varepsilon)$, що для $T > T_0$ система рівнянь (2) має єдиний розв'язок із ймовірністю, не менше $(1 - \varepsilon)$.

Доведення. Позначимо

$$H(t; \tau, \theta) = g(y(t), \tau) - g(y(t), \theta),$$

$$H_i(t; \tau, \theta) = g_i(y(t), \tau) - g_i(y(t), \theta),$$

$$H_{il}(t; \tau, \theta) = g_{il}(y(t), \tau) - g_{il}(y(t), \theta), \quad i, l = 1, \dots, q,$$

$$\gamma = \frac{1}{E\Psi'(\varepsilon(0))}, \quad G_T(\tau) = \left(G_T^{il}(\tau) \right)_{i,l=1}^q = \left(\gamma \frac{\partial^2 Q_T(\tau)}{\partial \tau_i \partial \tau_l} \right)_{i,l=1}^q.$$

Для доведення теореми необхідно показати, що гессіан $G_T(\tau)$ функціонала $\gamma Q_T(\tau)$ є додатно визначеною матрицею в деякому околі точки θ з ймовірністю, що прямує до одиниці при $T \rightarrow \infty$.

Для довільних $i, l = 1, \dots, q$ маємо

$$\begin{aligned} G_T^{il}(\tau) &= \\ &= \frac{\gamma}{T} \int_0^T \Psi'(X(t) - g(y(t), \tau)) g_i(y(t), \tau) g_l(y(t), \tau) dt - \\ &\quad - \frac{\gamma}{T} \int_0^T \Psi(X(t) - g(y(t), \tau)) g_{il}(y(t), \tau) dt = \\ &= G_1^{il}(\tau) + G_2^{il}(\tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Розглянемо другий доданок з (3)

$$\begin{aligned} G_2^{il}(\tau) &= \\ &= -\frac{\gamma}{T} \int_0^T \left[\Psi(\varepsilon(t) - H(t; \tau, \theta)) - \Psi(\varepsilon(t)) \right] g_{il}(y(t), \tau) dt - \\ &\quad - \frac{\gamma}{T} \int_0^T \Psi(\varepsilon(t)) H_{il}(t; \tau, \theta) dt - \frac{\gamma}{T} \int_0^T \Psi(\varepsilon(t)) g_{il}(y(t), \theta) dt = \\ &= G_3^{il}(\tau) + G_4^{il}(\tau) + G_5^{il}. \end{aligned} \quad (4)$$

Завдяки умові 2) маємо

$$|H(t; \tau, \theta)| = \left| \sum_{i=1}^q g_i(y(t), \tau_i^*) (\tau_i - \theta_i) \right| \leq \|\mathbf{k}\| \cdot \|\tau - \theta\|, \quad (5)$$

де $\mathbf{k} = (k^1, \dots, k^q)$. Крім того, для деякого $\delta_i \in (0; 1)$ знаходимо

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon(t) - H(t; \tau, \theta)) - \Psi(\varepsilon(t)) &= \\ &= \Psi'(\varepsilon(t) - \delta_i H(t; \tau, \theta)) H(t; \tau, \theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Тоді із врахуванням умов б) (i) і формул (5) і (6) отримуємо

$$|G_3^{il}(\tau)| \leq k_{\Psi} k^{il} |\gamma| \|\mathbf{k}\| \|\tau - \theta\|. \quad (7)$$

За умовою 4) маємо

$$\begin{aligned} |G_4^{il}(\tau)| &\leq |\gamma| \left(\frac{1}{T} \int_0^T \Psi^2(\varepsilon(t)) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{T} \Phi_T^{il}(\tau, \theta) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\gamma| k_{il} \left(|\zeta_T|^{\frac{1}{2}} + [E\Psi^2(\varepsilon(0))]^{\frac{1}{2}} \right) \|\tau - \theta\|, \end{aligned}$$

де

$$\zeta_T = \frac{1}{T} \int_0^T (\Psi^2(\varepsilon(t)) - E\Psi^2(\varepsilon(0))) dt. \quad (8)$$

Оскільки $E\Psi^4(\varepsilon(0)) < \infty$, функцію $\Psi^2(x)$, $x \in R^1$, можна розкласти в гільбертовому просторі $L_2(R^1, \varphi(x) dx)$, де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, за поліномами Чебишева–Ерміта:

$$\Psi^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(\Psi^2)}{k!} H_k(x),$$

$$C_k(\Psi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(x) H_k(x) \varphi(x) dx,$$

$$H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Використовуючи властивість

$$EH_m(\varepsilon(t)) H_k(\varepsilon(s)) = \delta_m^k k! B^k(t-s),$$

де δ_m^k – символ Кронекера, та очевидну рівність $E\Psi^2(\varepsilon(0)) = C_0(\Psi^2)$, отримуємо

$$\text{cov}(\Psi^2(\varepsilon(t)), \Psi^2(\varepsilon(s))) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(\Psi^2)}{k!} B^k(t-s).$$

Виходячи з того, що $|B(t)| \leq 1$, $t \in R^1$, маємо

$$\begin{aligned} |\text{cov}(\Psi^2(\varepsilon(t)), \Psi^2(\varepsilon(s)))| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(\Psi^2)}{k!} |B(t-s)| = \\ &= D\Psi^2(\varepsilon(0)) |B(t-s)|. \end{aligned} \quad (9)$$

Завдяки останній нерівності знаходимо

$$E\zeta_T^2 = E \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \text{cov}(\psi^2(\varepsilon(t)), \psi^2(\varepsilon(s))) dt ds \leq \leq D\psi^2(\varepsilon(0)) \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |B(t-s)| dt ds. \quad (10)$$

Якщо виконується умова 5)(i), то матимемо

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |B(t-s)| dt ds \leq \leq \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} |B(t)| dt \right) ds = \frac{1}{T} B. \quad (11)$$

З (10) та (11) отримуємо

$$E\zeta_T^2 \leq \frac{1}{T} B D\psi^2(\varepsilon(0)). \quad (12)$$

У разі, коли виконується умова 5) (ii), використовуючи властивості п.з.ф. (див., наприклад, [4]), знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B(t-s) dt ds &= \int_0^T \int_0^T B(T(t-s)) dt ds = \\ &= \frac{1}{T^\alpha} \int_0^T \int_0^T \frac{L(T(t-s))}{|t-s|^\alpha} dt ds \sim \left(\int_0^T \int_0^T \frac{dt ds}{|t-s|^\alpha} \right) \frac{L(T)}{T^\alpha} = \\ &= \frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} B(T). \end{aligned} \quad (13)$$

В обох випадках маємо

$$|\zeta_T|^{\frac{1}{2}} = {}_1o_p(1),$$

де $o_p(1)$ з різними індексами позначатимемо невід'ємні випадкові величини (в.в.), які прямують до нуля при $T \rightarrow \infty$ за ймовірністю. Таким чином, отримаємо

$$|G_4^{il}(\tau)| \leq |\gamma| k_{il} \left({}_1o_p(1) + \left[E\psi^2(\varepsilon(0)) \right]^{\frac{1}{2}} \right) \|\tau - \theta\|. \quad (14)$$

Аналогічно (9) знаходимо

$$|\text{cov}(\psi(\varepsilon(t)), \psi(\varepsilon(s)))| \leq E\psi^2(\varepsilon(0)) |B(t-s)|. \quad (15)$$

З (15) випливає, що

$$E(G_5^{il})^2 \leq \gamma^2 (k^{il})^2 E\psi^2(\varepsilon(0)) \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |B(t-s)| dt ds.$$

Беручи до уваги (11) та (13), отримуємо

$$|G_5^{il}| = {}_2o_p^{il}(1). \quad (16)$$

Таким чином, з (7), (14) та (16) випливає

$$|G_2^{il}(\tau)| \leq \left(k_{\psi'} k^{il} \|\mathbf{k}\| + k_{il} \left({}_1o_p(1) + \left[E\psi^2(\varepsilon(0)) \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right) \times \times |\gamma| \|\tau - \theta\| + {}_2o_p^{il}(1).$$

З іншого боку, матимемо

$$\begin{aligned} G_1^{il}(\tau) &= \frac{\gamma}{T} \int_0^T [\psi'(\varepsilon(t)) - H(t; \tau, \theta) - \psi'(\varepsilon(t))] \times \\ &\times g_i(y(t), \tau) g_l(y(t), \tau) dt + \\ &+ \frac{\gamma}{T} \int_0^T \psi'(\varepsilon(t)) \times \\ &\times [g_i(y(t), \tau) H_l(t; \tau, \theta) + g_l(y(t), \theta) H_i(t; \tau, \theta)] dt + \\ &+ \frac{\gamma}{T} \int_0^T [\psi'(\varepsilon(t)) - E\psi'(\varepsilon(t))] g_i(y(t), \theta) g_l(y(t), \theta) dt + \\ &+ J_T^{il}(\theta) = G_6^{il}(\tau) + G_7^{il}(\tau) + G_8^{il} + J_T^{il}(\theta). \end{aligned}$$

За умовою б)(iv) маємо

$$|G_6^{il}(\tau)| \leq \kappa k^i k^l |\gamma| \|\mathbf{k}\| \|\tau - \theta\|.$$

Крім того, аналогічно (14) отримуємо

$$|G_7^{il}(\tau)| \leq |\gamma| \left(k^i \|\mathbf{k}_i\| + k^l \|\mathbf{k}_l\| \right) \times \times \left({}_3o_p(1) + \left[E(\psi'(\varepsilon(0)))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \|\tau - \theta\|,$$

де $\mathbf{k}_i = (k^{i1}, \dots, k^{iq})$, $i = 1, \dots, q$.

Нарешті, враховуючи нерівність

$$|\text{cov}(\psi'(\varepsilon(t)), \psi'(\varepsilon(s)))| \leq D\psi'(\varepsilon(0)) |B(t-s)|,$$

яка виводиться аналогічно (15), маємо

$$E(G_8^{il})^2 \leq \gamma^2 (k^i)^2 (k^l)^2 D\psi'(\varepsilon(0)) \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |B(t-s)| dt ds,$$

звідки випливає

$$|G_8^{il}| = {}_4o_p^{il}(1).$$

З отриманих оцінок маємо

$$\begin{aligned} & |G_1^{il}(\tau) - J_T^{il}(\theta)| \leq |\gamma| \|\tau - \theta\| \times \\ & \times \left(\kappa k^i k^l \|\mathbf{k}\| + (k^i \mathbf{k}_l + k^l \mathbf{k}_i) ({}_3o_p(1) + E(\psi'(\varepsilon))^2)^{\frac{1}{2}} \right) + \\ & + {}_4o_p^{il}(1). \end{aligned}$$

Спираючись на властивість власних чисел суми двох симетричних матриць (див. [11, с. 101–103]), запишемо

$$\begin{aligned} & |\lambda_{\min}(G(\tau)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta))| \leq q \max_{1 \leq i, l \leq q} |G^{il}(\tau) - J_T^{il}(\theta)| \leq \\ & \leq q \left(\max_{1 \leq i, l \leq q} |G_1^{il}(\tau) - J_T^{il}(\theta)| + \max_{1 \leq j, l \leq q} |G_2^{jl}(\tau)| \right). \quad (17) \end{aligned}$$

Нехай $r = \frac{\lambda_*}{8q}$, де λ_* – число з умови 3).

Якщо відбувається подія

$$\Omega_r = \left\{ {}_1o_p(1) \leq r; {}_3o_p(1) \leq r; \right.$$

$$\left. \max_{1 \leq i, l \leq q} \{ {}_2o_p^{il}(1), {}_4o_p^{il}(1) \} \leq r; \|\hat{\theta}_T - \theta\| \leq \frac{r}{R} \right\},$$

$$\text{де } R = |\gamma| \max_{1 \leq i, l \leq q} \left\{ k_{\psi} k^{il} \|\mathbf{k}\| + k_{il} \left(r + [E\psi^2(\varepsilon(0))]^{\frac{1}{2}} \right); \right.$$

$$\left. \kappa k^i k^l \|\mathbf{k}\| + (k^i \mathbf{k}_l + k^l \mathbf{k}_i) (r + E(\psi'(\varepsilon))^2)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

то з (17) знаходимо

$$\begin{aligned} & P\{\Omega_r\} \leq P\left\{ |\lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_T)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta))| \leq 4qr \right\} \leq \\ & \leq P\left\{ \lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_T)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta)) \geq -\frac{\lambda_*}{2} \right\} \leq \\ & \leq P\left\{ \lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_T)) \geq \frac{\lambda_*}{2} \right\} \end{aligned}$$

для $T > T_0$ згідно з умовою 3).

Результат теореми 1 випливає з умови 7). Теорема доведена.

Асимптотична єдиність M -оцінки майже напевно

Посилимо умову 7):

8) $\hat{\theta}_T$ є сильноконзистентною оцінкою θ ,

тобто $\hat{\theta}_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \theta$ майже напевно (м.н.).

Достатні умови сильної конзистентності M -оцінок параметрів нелінійних моделей регресії містяться в статті [5].

Тоді теорему 1 можна переформулювати в такому вигляді.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1)–6) і 8). Тоді для майже всіх $\omega \in \Omega$ існує таке $T_0 = T_0(\omega)$, що для $T > T_0$ система рівнянь (2) має єдиний розв'язок.

Доведення. Позначатимемо $o(1)$ в.в., які прямують до нуля при $T \rightarrow \infty$ м.н. Для доведення теореми достатньо показати, що

$$|G_2^{il}(\hat{\theta}_T)| = o(1), \quad |G_1^{il}(\hat{\theta}_T) - J_T^{il}(\theta)| = o(1), \quad (18)$$

де $G_1^{il}(\tau), G_2^{il}(\tau), i, l = 1, \dots, q$, задано у (3).

Покажемо, що перше співвідношення у формулі (18) виконується. Розглянемо (4). Очевидно, $G_3(\hat{\theta}_T) = o(1)$ завдяки (7) та умові 8).

Для доведення $G_4(\hat{\theta}_T) = o(1)$ необхідно показати, що в.в. ζ_T , які задано (8), є величинами $o(1)$.

Нехай виконується умова 5)(i). Тоді з (12) випливає, що для послідовності $T_n = n^2, n \in N$, $\sum_{n=1}^{\infty} E\zeta_{T_n}^2 < \infty$, і тому $\zeta_{T_n} \rightarrow 0$ м.н. при $n \rightarrow \infty$.

Якщо $T \in [T_n, T_{n+1}]$, то матимемо

$$\zeta_T \leq \sup_{T_n < T \leq T_{n+1}} |\zeta_T - \zeta_{T_n}| + |\zeta_{T_n}|.$$

Доведемо, що

$$\sup_{T_n < T \leq T_{n+1}} |\zeta_T - \zeta_{T_n}| \rightarrow 0 \text{ м.н.}$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \zeta_T - \zeta_{T_n} &= \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right) \int_0^{T_n} (\psi^2(\varepsilon(t)) - E\psi^2(\varepsilon(0))) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{T_n}^T (\psi^2(\varepsilon(t)) - E\psi^2(\varepsilon(0))) dt = I_1 + I_2. \quad (19) \end{aligned}$$

Для $T \in (T_n, T_{n+1}]$ маємо

$$|I_1| \leq \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} |\zeta_{T_n}| \rightarrow 0 \text{ м.н.}$$

Розглянемо I_2 . Для $T \in [T_n, T_{n+1}]$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |\psi^2(\varepsilon(t)) - E\psi^2(\varepsilon(0))| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \psi^2(\varepsilon(t)) dt + \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} E\psi^2(\varepsilon(0)) = \\ &= \frac{T_{n+1}}{T_n} \zeta_{T_{n+1}} - \zeta_{T_n} + \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} E\psi^2(\varepsilon(0)) \rightarrow 0 \text{ м.н.} \end{aligned}$$

Таким чином, маємо $\zeta_T = o(1)$.

У разі виконання умови 5) (ii) з (13)

впливає, що для послідовності $T_n = n^{\frac{1}{\alpha} + \nu}$, $n \in N$, де $\nu > 0$ — деяке число, має місце збіжність $\zeta_{T_n} \rightarrow 0$ м.н. при $n \rightarrow \infty$, оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(T_n)}{T_n^{\alpha}} < \infty. \text{ Далі, доведення збіжності } \zeta_T \rightarrow 0$$

м.н. аналогічно доведенню попереднього випадку.

Доведення того, що $G_5^{il} = o(1)$, аналогічно доведенню для ζ_T . Зазначимо лише, що вираз, подібний I_2 з (19), оцінюється так:

$$\begin{aligned} \left| \frac{|\gamma|}{T} \int_{T_n}^T \psi(\varepsilon(t)) g_{il}(y(t), \theta) dt \right| &\leq \frac{k^{il} |\gamma|}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |\psi(\varepsilon(t))| dt \leq \\ &\leq k^{il} |\gamma| \sqrt{\frac{T_{n+1} - T_n}{T_n}} \sqrt{\frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \psi^2(\varepsilon(t)) dt} \rightarrow 0 \text{ м.н.} \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

З аналогічних міркувань випливає, що $G_6^{il}(\hat{\theta}_T) = o(1)$, $G_7^{il}(\hat{\theta}_T) = o(1)$ і $G_8^{il} = o(1)$. Таким чином, (18) виконано. Теорема доведена.

Висновки

Отримання достатніх умов єдиності розв'язку системи нормальних рівнянь, що визначають M -оцінку параметра нелінійної моделі регресії, надає можливість зробити наступний крок у вивченні асимптотичних властивостей M -оцінок, а саме довести асимптотичну нормальність цієї оцінки за різних припущень щодо характеру залежності випадкового шуму.

А.В. Иванов, И.В. Орловский

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ M -ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕССИИ

Получены условия, при которых M -оценка неизвестного параметра в нелинейной регрессионной модели с непрерывным временем и сильно- или слабозависимым случайным шумом является единственным (в определенном асимптотическом смысле) решением системы нормальных уравнений, которые ее определяют.

O.V. Ivanov, I.V. Orlovsky

ON THE UNIQUE M -ESTIMATES OF NONLINEAR REGRESSION MODEL PARAMETERS

Through experiments conducted, we uncover the conditions, under which M -estimate of the model parameter in the nonlinear regression model with continuous time and strong/weak dependent random noise is a unique solution of the system (in a definite asymptotic sense).

1. Huber P.J. Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte-Carlo // Ann. Statist. — 1973. — 1, N 5. — P. 799–821.
2. Хьюбер П. Робастность в статистике. — М.: Мир, 1984. — 304 с.
3. Ivanov A.V., Leonenko N.N. Asymptotic behavior of M -estimators in continuous-time non-linear regression with long-range dependent errors // Random Oper. and Stoch. Equ. — 2002. — 10, N 3. — P. 201–222.

4. *Ivanov A.V., Orlovsky I.V.* L_p -estimates in nonlinear regression with long-range dependence // *Theory of Stochastic Processes*. – 2001. – **7(23)**, N 3-4. – P. 38–49.
5. *Іванов О.В., Орловський І.В.* Конзистентність M -оцінок у нелінійних моделях регресії з неперервним часом // *Наукові вісті НТУУ “КПІ”*. – 2005. – № 4. – С. 140–147.
6. *Orlovsky I.V.* M -estimates in nonlinear regression with weak dependence // *Theory of Stochastic Processes*. – 2003. – **9(25)**, N 1-2. – P. 108–122.
7. *Гончаренко Ю.В., Ляшко С.И.* Теорема Брауэра. – К.: КИЙ, 2000. – 48 с.
8. *Іванов О.В., Орловський І.В.* Асимптотична нормальність M -оцінок у класичній нелінійній моделі регресії // *Укр. мат. журн.* – 2008. – **60**, вип. 11. – С. 1470–1488.
9. *Liese F., Vajda I.* Consistency of M -estimates in general regression models // *J. Multiv. Analysis*. – 1994. – **50**, N 1. – P. 93–114.
10. *Ivanov A.V.* *Asymptotic Theory of nonlinear regression*. – Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1997. – 327 p.
11. *Wilkinson J.H.* *The algebraic eigen value problem*. – Oxford: Clarendon Press, 1962. – 662 p.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
25 березня 2009 року