

УДК 532.542:519.632:004.942

О.М. Бердник, Є.О. Гаєв

СТАБІЛІЗОВАНИЙ ПОТІК В'ЯЗКОЇ РІДИНИ ЧЕРЕЗ ТРУБУ ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕРІЗУ З ЛЕГКОПРОНИКНОЮ ШОРСТКІСТЮ НА СТІНКАХ

Вступ

У теплотехніці та машинобудівній гідравліці нерідко зустрічаються задачі знаходження параметрів потоку через канали некругового нормального перерізу [1–4]. Зокрема, дослідженням потоків рідини в прямокутних та квадратних трубах займалися Гесснер, Хан [5, 6] та ін. “Строгі” розв’язки при цьому здебільшого отримували методом рядів Фур’є [1–3]. Відомо, що у внутрішніх потоках крізь переріз з кутовими точками виникають явища, які відсутні в разі круглого або еліптичного випадку. Так, Нікурадзе і Прандтлем було встановлено [5] наявність слабого руху рідини в трансверсальному (до основного – аксіального, поздовжнього) напрямку. І хоча магнітуда такого обертання рідини становить орієнтовно 1% від основного потоку, його вплив є істотним у задачах теплообміну [7]. У наш час дослідження течій через труби прямокутного перерізу продовжуються як для уточнення відомих залежностей [8], так і в детальнішій фізико-математичній постановці з більш потужними обчислювальними інструментами [9–11].

В останні роки особлива увага приділяється руху рідини в каналах із пористими вставками або навіть цілком заповнених пористим матеріалом [4, 12–15]. Вважаємо, що узагальнення і доповнення задач, що стали вже класичними, новим елементом – легкопроникною шорсткістю (ЛПШ) [16] – є актуальним і має базуватися на вказаному попередньому досвіді досліджень. Зокрема, стаття [4] є найбільш близькою до тієї задачі, що розглядається тут. Досліджуючи потік рідини при наявності в трубі пористого середовища, Хумен [4] для пошуку аналітичного розв’язку також використовує ряди Фур’є. Ми ж застосуємо чисельний інструмент, що пропонується середовищем MATLAB [17, 18].

Постановка задачі

Мета статті – узагальнити відому задачу про стаціонарний потік в’язкої нестисливої рідини крізь нескінченну призматичну трубу [1, 2] на випадок наявності біля її стінок легкопроникної шорсткості та дослідити поведінку потоку залежно від параметрів ЛПШ.

Вихідні положення

Нехай шар перешкод висотою h на стінках труби з прямокутним нормальним перерізом $2b \times 2a$ (рис. 1) має однорідну структуру (можна було б розглянути й різні h_i біля стінок, $i = \overline{1, 4}$, та обмежимося найпростішим випадком), наприклад, малі сфери, рівномірно “вморожені” в просторі (рис. 2).

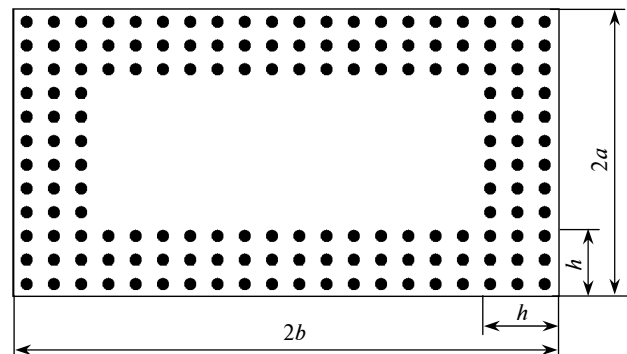


Рис. 1. Поодинокий переріз труби з ЛПШ на стінках ($a\gamma = b, \gamma = \text{const}$)

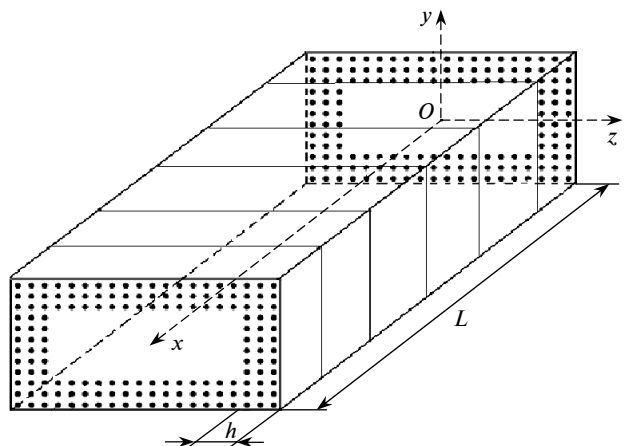


Рис. 2. Схематичне зображення прямокутної труби з ЛПШ

Декартові координати $\{x, y, z\}$ вважаємо такими, що вісь Ox спрямована вздовж труби,

а координати $\{y, z\}$ задають точки в нормальному перерізі. Початок координат розміщуємо на перетині діагоналей таким чином, щоб стінки прямокутної труби мали координати $y = \pm a$ і $z = \pm b$. Аналогічно [1, 2] вважаємо, що потік рідини є стабілізованим вздовж координати x ($\partial U / \partial x \equiv 0$), $\Delta p = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\rho = \text{const}$. Крім того, покладаємо, що сила $f_*(y, z, U)$ має моделювати вплив пористого середовища, яке заповнює канал повністю [4] або частково. Тому загальні рівняння Нав'є–Стокса для нашого випадку спрощуються до двовимірного рівняння:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = -\frac{\Delta p}{L} + f_*(y, z, U). \quad (1)$$

Відомі щонайменше дві моделі пористого середовища – Брінкмана–Форцхаймера [4, 14] та Гаєва [15, 16]. Перша модель, на наш погляд, адекватна більш щільним пористим шарам, значно повільнішим рухам рідини, ніж розглянуто тут. Тому візьмемо останню модель, згідно з якою розривна сила праворуч в (1) моделює “осереднену” дію легкопроникної шорсткості:

$$f_*(y, z, U) = \begin{cases} 0, & h = 0, \\ -nk\rho U, & h > 0 \end{cases} \quad (2)$$

(можливе і квадратичне задання цієї сили, що розглядатиметься в окремій публікації). При цьому граничними умовами даної двовимірної задачі будуть умови прилипання до стінок прямокутної труби:

$$U = 0 \text{ при } y = \pm a, |z| \leq b, z = \pm b, |y| \leq a. \quad (3)$$

При $z = b/a \rightarrow \infty$ (плоский канал) таку задачу розглянуто в [16]. У випадку відсутності ЛПШ (коли $f_*(y, z, U) \equiv 0$) отримують квадратичний профіль швидкості з максимумом на осі Ox :

$$W = \frac{p'a^2}{2\mu}. \quad (4)$$

Математична постановка задачі в безрозмірній формі

Проведемо процес безрозмірювання. Якщо за масштаб довжини вибрати напіввисоту a , а за масштаб швидкості – величину W (4), то задача (1)–(3) набуде такого безрозмірного вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{z}^2} = \\ & = -2 + \begin{cases} 0, & 0 < |\bar{y}| < 1 - \bar{h}, 0 < |\bar{z}| < \gamma - \bar{h}; \\ A\bar{U}, & 1 - \bar{h} \leq |\bar{y}| \leq 1, \gamma - \bar{h} \leq |\bar{z}| \leq \gamma, \end{cases} \quad (5) \end{aligned}$$

де $A = -a^2 kn/\nu$, $\bar{h} = h/a$ – відповідно безрозмірні щільність та висота ЛПШ. При $A = 0$ або $h = 0$ маємо рівняння Пуассона, а в загальному випадку – рівняння Гельмгольца з розривним коефіцієнтом перед U . Очевидно, граничними умовами будуть:

$$\bar{U} = 0 \text{ при } \bar{y} = \pm 1, |\bar{z}| \leq \gamma, \bar{z} = \pm \gamma, |\bar{y}| \leq 1. \quad (6)$$

Надалі знак безрозмірності (риску) опускаємо.

Розв'язок та аналіз задачі

Маємо двовимірну лінійну граничну задачу для диференціального рівняння в частинних похідних, що є класичним рівнянням математичної фізики еліптичного типу [20], яке можна записати у вигляді

$$-\text{div}(c \text{ grad } U) + aU = f. \quad (7)$$

У даному випадку маємо справу з лінійним рівнянням Гельмгольца (за умови припущення про лінійність сили (2)) на прямокутній області. Випадок нелінійної (квадратичної) сили плануємо розглянути окремо. Зауважимо, що аналогічне рівняння, але з неперервно заданою силою AU , розглядалося в [4].

Для розв'язування рівняння (7) з граничними умовами (6) використаємо можливості *Partial Differential Equations (PDE) toolbox* [17], де реалізовано метод скінченних елементів. Зокрема, візьмемо до уваги відмінність позначень у даній праці (y, z) та позначень у *PDE toolbox* (x, y) . Тому як параметри рівняння (у меню “PDE Specification...”) задамо значення: $c = 1$, $f = 2$. А щодо коефіцієнта a , то тут виникла певна складність, оскільки він має бути змінним: $a = a(y, z)$. Вирішення цієї проблеми в програмному середовищі MATLAB полегшується за рахунок суміщення операцій між арифметичними та булевими змінними (“нестандартна” риса для більшості мов програмування) [18]. На цій підставі, для реалізації коефіцієнта $A(y, z)$, розривного при переході через межу ЛПШ, створена спеціальна m -функція:

```
function a = EPR_rectangle(x,y,Gamma,h,A),
    a = A - A*(x > -Gamma + h).*
    .*(x < Gamma - h).*(y < -h).*(y > -1 + h).
```

Тут $(x > -Gamma + h)$, $(x < Gamma - h)$, $(y < -h)$ і $(y > -1 + h)$ – булеві величини, які набувають значення 1 (*true*), якщо виконуються умови в дужках, та значення 0 (*false*) при їх невиконанні. Очевидно, що побудована з булевих виразів величина $A*(x > -Gamma + h).*(x < Gamma - h).*(y < -h).*(y > -1 + h)$ набудатиме чисельного значення $A > 0$, якщо точка (x, y) належить прямокутнику, який не має елементів ЛПШ, та значення $A = 0$, якщо вона лежить в області ЛПШ (тобто в зовнішньому прямокутнику). Крім того, було використано стандартну операцію $.*$ – “поелементного множення” [17, 18].

Для пошуку чисельного розв’язку поставленої задачі виконували дії в MATLAB таким чином.

1. У середовищі *pdeTool* задали геометрію області – прямокутник з вершинами $(-\gamma; -1)$, $(-\gamma; 1)$, $(\gamma; -1)$ і $(\gamma; 1)$.

2. У меню “*PDE Specification...*” задали тип диференціального рівняння (*Elliptic*) та його коефіцієнти ($c = 1, f = 2, a = EPR_rectangle(x, y, Gamma, h, A)$) з конкретними чисельними значеннями для $Gamma, h, A$.

3. Вказали, що граничними умовами (“*Specify Boundary conditions...*”) будуть умови Діріхле (*Dirichle*).

4. Виконали розбиття області на скінченні елементи методом триангуляції (*Mesh > Initialize Mesh*) і далі кілька разів *Refine Mesh* для досягнення достатньої точності за рахунок зменшення сітки).

5. Запустили процес обчислення за допомогою меню (“*Solve > Solve PDE*”).

6. Візуалізували результат (рис. 3), побудувавши тривимірний розподіл швидкості $U(y, z)$ (“*Plot > Plot Solution*”).

7. Експортували в середовище MATLAB всі потрібні параметри (“*Boundary > Export Decomposed Geometry, Boundary Cond's...*”, “*PDE > Export PDE Coefficients...*”, “*Mesh > Export Mesh...*”) та результат (“*Solve > Export Solution...*”). Дана процедура необхідна для наступних обчислень найбільшої швидкості U_0 , середньої швидкості $U_{сер}$ і коефіцієнта опору λ .

На цьому закінчується перший етап обчислень для конкретного прямокутника (що характеризується параметром γ) та конкретних параметрів ЛПШ A і h . Його результатом є розподіли швидкості потоку над прямокутником; деякі показано на рис. 3 і 4.

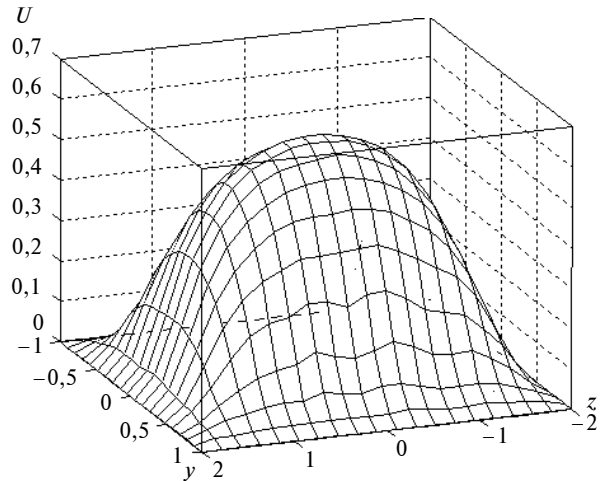


Рис. 3. Розподіл U в трубі прямокутного перерізу 4×2 з ЛПШ на стінках ($A = 100, h = 0,3$)

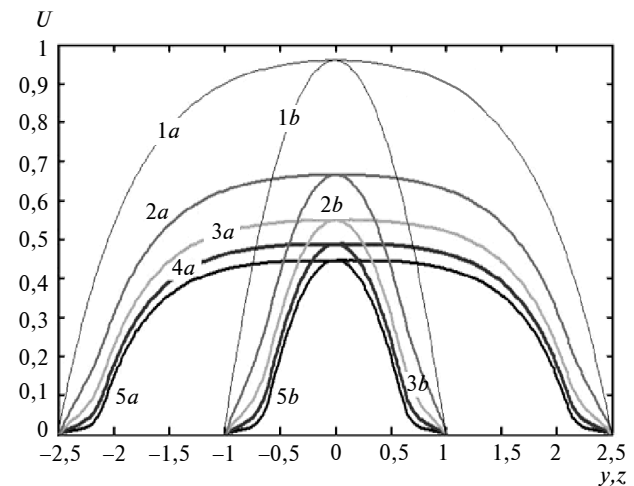


Рис. 4. Розподіли швидкості впоперек широкого (a) і вузького (b) центральних перерізів прямокутної труби 5×2 для ЛПШ висотою $h = 0,4$ залежно від щільності: 1 – $A = 0$ (ЛПШ відсутня); 2 – $A = 20$; 3 – $A = 50$; 4 – $A = 100$; 5 – $A = 200$

З рис. 3 видно, що потік в умовах ЛПШ (біля стінок) істотно загальмований; його швидкість прямує до нуля із зростанням щільності A . На рис. 4 продемонстровано розподіли через довгий (a) і короткий (b) центральні перерізи прямокутної труби розмірами 5×2 – зрозуміло, що у верхній частині відповідні профілі дотикаються. Разом із збільшенням щіль-

ності ЛПШ профілі “спадають”, зменшуються як швидкість на осі U_0 (найбільша в перерізі), так і середня $U_{\text{сер}}$. Для квадратної труби ($\gamma = 1$) при відсутності ЛПШ ($A = 0$) підтверджуються з точністю до 1% залежності [19]: $U_0 = U(0; 0) = 2,097U_{\text{сер}}$, $U_{\text{сер}} = 0,281p'a^2/2\mu$. А при збільшенні горизонтальної витягнутості труби ($\gamma \rightarrow \infty$) зростає величина розподілів (a) до $U \equiv 1$, і потік наближається до так званого плоского випадку.

Тепер візьмемо до уваги коефіцієнт гідравлічного опору труби λ . Інтегруючи отриманий розподіл швидкості, маємо безрозмірні витрати рідини і середню швидкість:

$$Q = \iint_{\substack{-1 \leq z \leq 1 \\ -\gamma \leq y \leq \gamma}} U(y, z) dy dz, \quad U_{\text{сер}} = \frac{Q}{2 \cdot 2\gamma}.$$

Із врахуванням того, що чисельний розрахунок надає результат у вигляді таблиці швидкостей $\{U_{ij}\}$ у середині трикутних площадок $\{y_i, z_j\}$ площиною $\{F_{ij}\}$ відповідно, першу формулу слід використовувати у вигляді

$$Q \approx \sum_{i,j} U_{ij} F_{ij}. \quad (8)$$

На точність впливають розміри триангуляційної сітки; у разі потреби її можна покращити через меню *Refine Mesh* (п. 4 наведеного вище алгоритму). Масив площ $\{F_{ij}\}$ можна отримати в *MATLAB PDE toolbox* на підставі проведеного в п. 7 “експорту” результатів у робочий простір такою командою:

$$\gg [K, F] = \text{assempde}(b, p, e, t, c, a, f).$$

У гідравліці прийнято вводити “гідравлічний опір” λ як коефіцієнт пропорційності між градієнтом тиску і швидкісним напором, тобто за визначенням [2, 8]:

$$p' = \frac{df}{2a} \frac{\lambda}{2} \frac{\rho U_{\text{сер}}^2}{2} \quad (9)$$

(на відміну від (8) тут береться розмірна середня швидкість $U_{\text{сер}}$). Відокремлюючи число Рейнольдса за осередненою швидкістю $Re = \frac{2aU_{\text{сер}}}{\nu}$, перетворюємо (9) до вигляду $p' = \frac{\lambda \rho \nu U_{\text{сер}}}{8a^2} Re$, а враховуючи взятий мас-

штаб швидкості (4), маємо формулу для теоретичного обчислення коефіцієнта гідравлічного опору:

$$\lambda Re = \frac{16}{\bar{U}_{\text{сер}}}. \quad (10)$$

У цій формулі знаменник, безрозмірна середня швидкість у перерізі $\bar{U}_{\text{сер}}$, як видно з постановки задачі, залежить від “витягнутості” прямокутного перерізу γ , щільності A та висоти ЛПШ h . Необхідні обчислення проведено в *MATLAB* командою:

$$\gg \text{Area} = \text{sum}(F); \quad Q = \text{sum}(u.*F); \quad U_s = Q/\text{Area}, \\ \text{Lambda Re} = 16/U_s.$$

Результуючі залежності $\lambda Re = \varphi(A, h, \gamma)$ наведено на рис. 5, де взято $\gamma = 2$.

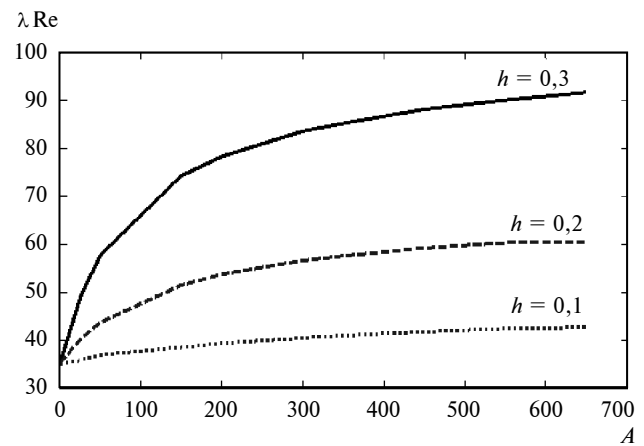


Рис. 5. Залежність λRe від безрозмірної щільності для різних висот ЛПШ

Природно, що будь-яка ЛПШ збільшує гідравлічний опір. Проте для багатьох задач такі витрати можуть бути виправдані, наприклад тоді, коли це покращує теплообмін або створює можливості керування потоком. Криві показують, що опір збільшується разом із щільністю ЛПШ A , причому інтенсивність його збільшення пропорційна висоті ЛПШ h . З рис. 5 видно, що всі криві виходять практично з однієї точки. Це явище можна пояснити тим, що при будь-якому h випадок $A = 0$, так само як і випадок $h = 0$ при будь-якому A , означає відсутність ЛПШ. А такі дослідження вже описані в літературі [1–3, 8, 19] і для витягнутості $\gamma = 2$ значення λRe дорівнює приблизно 35.

Цікавим є випадок товщини ЛПШ $h = \min\left\{1, \frac{1}{2}\gamma\right\}$, тобто коли елементи ЛПШ заповнюють весь переріз каналу. Рух рідини при цьому не припиняється, але потребує сильнішого градієнта тиску p' , тобто гідравлічний опір є найбільшим. Саме такий випадок (але з моделлю пористого середовища за Брінкманом–Форцхаймером) досліджувався в [4, 14].

Достовірність результатів

Перевіримо наші результати за допомогою тестових розрахунків.

1. При відсутності перешкод на стінках призматичної труби (тобто за умови $h = 0$ чи $A = 0$) гідравлічний коефіцієнт тертя не залежить від шорсткості стінок, а залежить тільки від числа Рейнольдса. Такі дані для різних γ наведені, зокрема, в [1]:

$$\lambda = \frac{128}{\text{Re}} \frac{1}{f(\gamma)}, \quad \text{Re} = \frac{2aU_{\text{сєр}}}{\nu}, \quad (11)$$

де функція $f(\gamma)$ обчислюється за відповідною формулою в [1].

У таблиці проведено порівняння залежності значень добутку λRe , наведених згідно з [1] і отриманих нами; відповідність – добра, різниця не перевищує 1 %.

Таблиця. Залежність λRe для випадку гладких прямокутних труб різної витягнутості

γ	λRe за формулою (11)	λRe за розрахунком
1	56,8131	56,9611
2	34,9345	34,9869
3	30,4544	30,3988
5	27,4384	27,5071
10	25,6000	25,7129
12	25,3014	25,3934
100	24,1555	24,3351
∞ [1] 1000 (автор)	24,0015	24,2114

Граничний випадок $h = 0$ дає такі ж результати для будь-якого A , тобто наші розрахунки збігаються з даними інших авторів (коли параметри A і h , що узагальнюють задачу, не впливають на результат).

2. Оскільки з [1] відомо, що для плоскої труби без ЛПШ маємо

$$\lambda = 24/\text{Re}, \quad (12)$$

то перевіримо поведінку розрахунків (10) за нашим алгоритмом при $\gamma \rightarrow \infty$. Зокрема, друга графа таблиці показує, що добуток λRe дійсно наближається до 24, тобто виконується граничний перехід до відомого випадку (12).

3. Всі попередні перевірки були проведені за умови відсутності A і h . Розрахунки ж із довільними вказаними параметрами можна порівняти з результатами Гаєва для ЛПШ в умовах плоскої задачі [16], тобто при $\gamma \rightarrow \infty$. Точність висока.

Таким чином, можна стверджувати, що розроблений чисельний алгоритм дає достовірні результати, причому, крім задачі, розглянутої в даній статті, його можна застосувати в наступних, більш складних розрахунках для нелінійної ЛПШ, де сила (2) задається квадратичною формулою.

Висновки

Задачу про ламінарний стабілізований потік в'язкої рідини крізь трубу прямокутного перерізу узагальнено на випадок наявності легкопроникної шорсткості на її стінках. Відповідне рівняння Гельмгольца розв'язано чисельно за допомогою *MATLAB PDE toolbox*. Отримано розподіли поздовжньої швидкості потоку залежно від відносної висоти ЛПШ h і її безрозмірної щільності A (див. рис. 3, 4). На цій підставі обчислено залежність коефіцієнта гідравлічного опору λ як функції від Re , h і A (див. рис. 5), що узагальнює відому залежність $\lambda = c/\text{Re}$ на наявність двох додаткових параметрів задачі.

Достовірність отриманих результатів відкриває перспективу для використання алгоритму розв'язку у випадку нелінійної сили, що моделює дію ЛПШ. Також було б цікаво дослідити вплив ЛПШ на трансверсальну вторинну течію, що становить 1 % від основної [5]. Проте це явище не може бути розглянутим у “ламінарній” постановці, оскільки з самого початку покладено $\partial/\partial y = 0, \partial/\partial z = 0$. Але набутий досвід може бути використано для моделювання його згідно з [7], або ж у подальшому – для аналізу виникнення нестійкості і турбулентності.

О.М. Бердник, Е.А. Гаев

СТАБИЛИЗИРОВАННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ ТРУБУ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ЛЕГКОПРОНИЦАЕМОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ НА СТЕНКАХ

Сформулирована задача о ламинарном стабилизированном движении вязкой жидкости сквозь бесконечную трубу прямоугольного сечения с легкопроницаемой шероховатостью (ЛПШ) на стенках. Решение проведено с использованием математического пакета MATLAB. Проверка результатов выполнена на предельных случаях, которые приводят к уже известным задачам.

O.M. Berdnyk, Ye.A. Gayev

FULLY DEVELOPED VISCOUS FLOW THROUGH RECTANGULAR PIPE WITH AN EASILY PENETRABLE ROUGHNESS ON WALLS

The aim of this paper is to formulate a problem of laminar viscous flow through an endless rectangular pipe with an easily penetrable roughness (EPR) on walls. We solve this problem by utilizing the MATLAB mathematical package. Moreover, we obtain the numeric data on the roughness depth and density. Our research results are tested on some borderline cases that result in the given problems.

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
2. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия, 1967. – 412 с.
3. Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982. – 472 с.
4. Hooman K. Heat and fluid flow in a rectangular micro-channel filled with a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2008. – 51, N 25-26. – P. 5804–5810.
5. Gessner F.B., Jones J.B. On some aspects of fully-developed turbulent flow in rectangular channels // J. Fluid Mechanics. – 1965. – 23. – P. 689–713.
6. Hun L.S. Hydrodynamic entrance length for incompressible flow in rectangular ducts // Trans. ASME, J. Applied Mechanics. – 1960. – 27, N 3. – P. 403–408.
7. Сурков С.В. Волновая модель вторичных течений в призматических каналах // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2002. – Вып. 2(18). – С. 184–188.
8. Бутенко А.Г. Сопротивление труб прямоугольного поперечного сечения // Там же. – 2003. – Вып. 1(19). – С. 221–224.
9. Huser A., Birigen S. Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow in a Square Duct // J. Fluid Mechanics. – 1993. – 257. – P. 65–95.
10. Березин С.Б., Комарова Е.С., Пасконов В.М. Суперкомпьютерное исследование нестационарных трехмерных течений несжимаемой жидкости в каналах прямоугольного сечения на основе модели Навье–Стокса // Вычисл. методы и программирование. – 2008. – 9. – С. 395–400.
11. Попов А.Г., Прохур Н.З., Химич А.Н. Алгоритмы расчета вязких течений на MIMD-компьютерах // УСиМ. – 2008. – № 2. – С. 60–63.
12. Kuznetsov A.V. Flow in a Curved Porous Channel with a Rectangular Cross-Section // J. of Porous Media. – 2008. – 11. – P. 241–246.
13. Uhlmann M., Nagata M. Linear stability of flow in an internally heated rectangular duct // J. of Fluid Mechanics. – 2006. – 551. – P. 387–404.
14. Федоровська М.В. Чисельний аналіз розвитку течії рідини у каналі з оберненою сходиною, що заповнена пористим середовищем // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 190–194.
15. Гаев Е.А., Шихалиев С.З. Длина входного участка канала с линейной легкопроницаемой шероховатостью // Прикл. гідромеханіка. – 2003. – 5(77). – С. 13–19.
16. Гаев Е.А. Модели легкопроницаемой шероховатости для задач гидромеханики и теплофизики: Дис. ... д-ра техн. наук: 01.02.05. – К.: НАН Украины; Институт гидромеханики, 2000. – 345 с.
17. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
18. Гаев Е.О., Нестеренко Б.М. Універсальний математичний пакет MatLab і типові задачі обчислювальної математики: Навч. посібник. – К.: НАУ, 2004. – 176 с.
19. Филиппов В.М. Экспериментальное исследование развития ламинарного течения в квадратном канале // Аэромеханика. – 1976. – С. 217–229.
20. Кошляков Н.С., Глинер Н.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики: Учеб. пособие для мех.-мат. факультетов ун-тов. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
19 січня 2010 року