

УДК 621.395.6

В.І. Найдено, О.С. Постульга

ТОЧНІСТЬ РОЗРАХУНКУ ДИСПЕРСІЇ ВІДКРИТОЇ ГРЕБІНКИ З НЕСКІНЧЕННО ТОНКИМИ ГРЕБЕНЯМИ

Вступ

Оцінка точності розрахунку дисперсії періодичних структур є актуальною у зв'язку з використанням їх у міліметровому і субміліметровому діапазонах у метаматеріалах, band-gap-структурах і фільтрах. Зараз здається доступною оцінка точності розрахунку дисперсії найпростішої періодичної структури – гребінки. По сьогодні дане питання не було висвітлене достатньою мірою в літературі.

В [1] наведено характеристики власних хвиль відкритої гребінки, розраховані методом частинних областей, а також інформацію щодо зміни величини ka (k – хвильове число вільного простору, a – глибина канавок (резонаторів)) із зміною порядку визначника, тобто із зміною числа доданків у розкладі тангенціального до межі поділу $y = 0$ електричного поля по коливаннях резонатора. При цьому число доданків у такому розкладі по просторових гармоніках залишалось постійним.

Результати, наведені в [1] в табл. 1, не дають відповіді про точність розрахунку дисперсійної кривої. Вони свідчать лише про кількісну зміну ka із збільшенням числа доданків у розкладі тангенціального до межі поділу $y = 0$ електричного поля по коливаннях резонатора.

Для оцінки точності розрахунку дисперсії необхідно мати опорну, еталонну дисперсійну характеристику, яка може бути отримана при використанні методу факторизації (Вінера–Хопфа) [2].

Постановка задачі

Метою даної статті є порівняння результатів розрахунку дисперсійних характеристик відкритих гребінчастих структур методом факторизації та методом частинних областей.

Розрахунок дисперсійної характеристики методом факторизації

Гребінка і введена декартова система координат зображені на рис. 1. Це однорідна вздовж осі x , періодична вздовж осі z ідеально

провідна структура з періодом L . Глибину канавок позначимо a , ширину – l . Тоді товщина пластин становить $t = L - l$. Як відомо, вздовж такої структури можуть поширюватися сповільнені електромагнітні хвилі, що взаємодіють з електронними пучками [2–4].

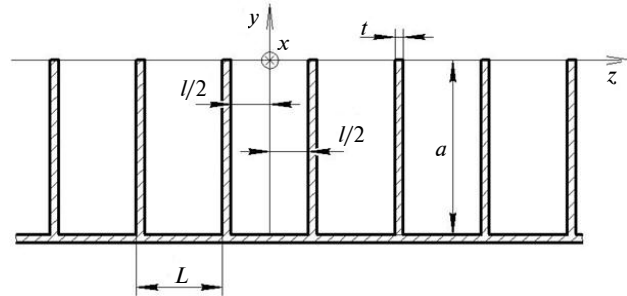


Рис. 1. Гребінка і введена декартова система координат

Як і в [1], обмежимося розглядом двовимірних електромагнітних хвиль, магнітне поле яких має єдину складову H_x , що не залежить від координати x . Електричне поле має дві складові E_y і E_z . Дотримуватимемося позначень, прийнятих в [1].

Метод факторизації може використовуватися тільки для гребінок із нескінченно тонкими гребенями, отже, $t = 0$, $L = l$. Методика розрахунку характеристик гребінки цим методом наведена в [2]. При строгій постановці задача знаходження електромагнітних хвиль у гребінці легко зводиться до розв'язання нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), як у методі частинних областей. За твердженням автора [2], при застосуванні методу факторизації отримуємо СЛАР, яка сходиться настільки швидко, що для чисельних розрахунків достатньо обмежитися щонайбільше двома рівняннями з двома невідомими, при цьому враховується характер поля як поблизу гострих країв гребенів, так і поблизу відкритого кінця кожного з резонаторів, що утворюються сусідніми гребенями. Ми перевірили це твердження. Дисперсійне рівняння (ДР) має вигляд

$$\text{Det} \|A_{mn}\| = 0, \quad (1)$$

$$\text{де } A_{mn} = \delta_{mn} - \frac{2\Gamma_m e^{ik_m a}}{1 + \frac{k_n}{k_m}}; \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad k_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2} - \text{хвильове число хвилі } E_{0m} \text{ у}$$

хвилеводі, який утворений сусідніми пластинами;

$$\Gamma_0 = -e^{-2iL\frac{k}{\pi} \ln 2} \frac{1 - \frac{k}{i\gamma_0}}{1 + \frac{k}{i\gamma_0}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{k}{i\gamma_m}}{1 + \frac{k}{i\gamma_m}} \frac{1 - \frac{k}{i\gamma_{-m}}}{1 + \frac{k}{i\gamma_{-m}}} \frac{1 + \frac{k}{k_m}}{1 - \frac{k}{k_m}},$$

$$\Gamma_n = -e^{-2iL\frac{k_n}{\pi} \ln 2} \frac{1 + \frac{k_n}{k}}{1 - \frac{k_n}{k}} \frac{1 - \frac{k_n}{i\gamma_0}}{1 + \frac{k_n}{i\gamma_0}} \frac{1 - \frac{k_n}{i\gamma_n}}{1 + \frac{k_n}{i\gamma_n}} \frac{1 - \frac{k_n}{i\gamma_{-n}}}{1 + \frac{k_n}{i\gamma_{-n}}} \times$$

$$\times \prod_{\substack{m=1 \\ (m \neq n)}}^{\infty} \frac{1 - \frac{k_n}{i\gamma_m}}{1 + \frac{k_n}{i\gamma_m}} \frac{1 - \frac{k_n}{i\gamma_{-m}}}{1 + \frac{k_n}{i\gamma_{-m}}} \frac{1 + \frac{k_n}{k_m}}{1 - \frac{k_n}{k_m}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $\gamma_n = \sqrt{\beta_n^2 - k^2}$; $\beta_n = \beta + \frac{2\pi n}{L}$ – фазова стала n -ї просторової гармоніки. Формули для Γ_n містять нескінченні добутки. При обчисленні їх обмежують певним числом. Розрахунки Γ_n проводяться при різному числі множників. Відносна різниця розрахунку $\ln \Gamma_n$ при числі множників у добутках 100 і 1000 становить приблизно 0,02 %. Отже, для достатньої точності розрахунків можна обмежитися числом доданків у сумі 100.

Величини, що входять до ДР, залежать від параметра φ – зсуву фази 0-ї просторової гармоніки на періоді L , $\varphi = \beta L$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Розрахунок дисперсійної характеристики (ДХ) гребінки проведено з параметрами $\sigma = \frac{l}{L} = 1$, $\nu = \frac{l}{a} = 1$ з детермінантом (1) другого і третього рядків. Відносна різниця становить приблизно 10^{-7} . Отже, можна використовувати результати розрахунків, знайдені методом факторизації, як еталонні.

Обмежимося СЛАР другого порядку згідно з міркуваннями, викладеними вище. На рис. 2 зображено штриховою лінією дисперсійну характеристику для першої смуги пропускання, знайдену методом факторизації. Тут n – сповільнення 0-ї просторової гармоніки.

Розрахунок дисперсійної характеристики методом частинних областей

Тепер використаємо метод частинних областей. Цей метод на відміну від методу факто-

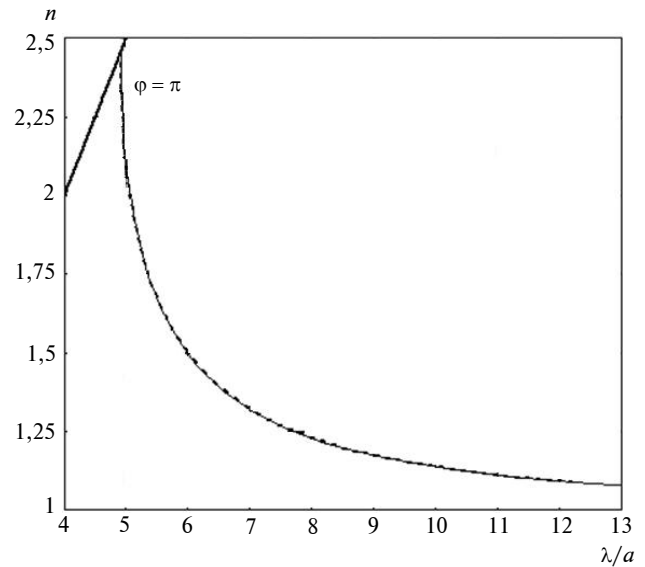


Рис. 2. Дисперсійні характеристики, розраховані методом факторизації та методом частинних областей: — — — — $n_{ч.о.}$; — — — — $n_{факт}$

ризації може бути застосований до гребінки з довільною товщиною гребенів. Але взяти їх товщину, яка дорівнюватиме нулю, неможливо, оскільки у формулах виникає невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для уникнення цього можемо взяти $\sigma = 0,9999999$.

При розрахунках, як і в [1], використовувався однорідна СЛАР для амплітуд коливань у резонаторах

$$C_m \delta_m - \sigma \sum_{p=0}^{\infty} C_p k_p \operatorname{tg}(k_p a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(f_n, \Phi_m)(f_n^*, \Phi_p)}{\gamma_n} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

де $C_m = B_m \cos(k_m a)$. Як вказувалося, в методі факторизації другий порядок СЛАР був достатнім для отримання достатньо точних результатів. У методі частинних областей треба провести визначення порядку СЛАР, при якому розв’язок буде якнайменше відрізнятися від розв’язку на основі методу факторизації.

Порядок СЛАР обмежимо числом M . Отже, маємо

$$p = 0, 1, \dots, M - 1,$$

$$m = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Необхідно також обмежити число доданків по n в сумі (2). Отже, є два параметри, залежно від яких буде змінюватись точність знайдених розв’язків: порядок СЛАР M та число гар-

монік N . При непарному N n буде змінюватись у межах

$$n = -\frac{N-1}{2}, \dots, -1, 0, \dots, \frac{N-1}{2},$$

при парному – в межах

$$n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Змінюючи M і N , знаходимо такий розв'язок ДР, який найбільш близький до знайденого розв'язку методом факторизації. За критерій близькості візьмемо середнє арифметичне відносних різниць знайдених розв'язків ДР методом частинних областей відносно методу факторизації при різних φ :

$$\varepsilon = \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N'} \left| \frac{k_{\text{факт } i} - k_{\text{ч.о } i}}{k_{\text{факт } i}} \right|,$$

де $k_{\text{факт } i}$, $k_{\text{ч.о } i}$ – знайдені розв'язки ДР методом факторизації та частинних областей, відповідно, при числі точок по φ , який дорівнює N' . Назвемо ε середньою похибкою. У табл. 1 наведено значення ε при різних M і N при $N' = 48$.

Наведені результати дають підстави зробити такі висновки:

- 1) із збільшенням порядку СЛАР точність знайдених розв'язків ДР збільшується;
- 2) СЛАР непарного порядку M дає меншу середню похибку порівняно із СЛАР більшого

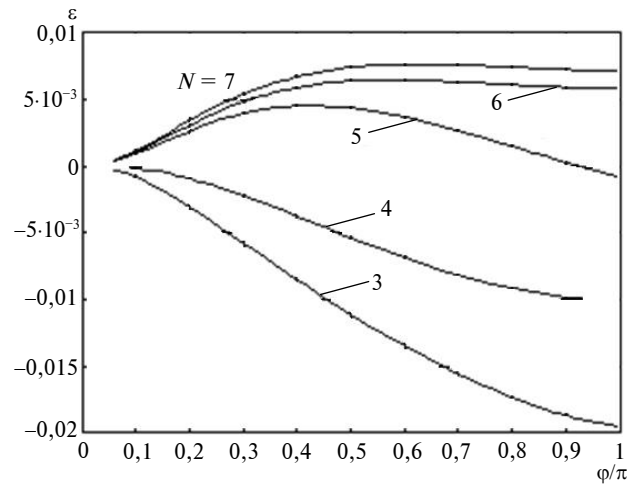


Рис. 3. Залежність відносної похибки $\varepsilon\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)$ для СЛАР 5-го порядку від числа гармонік N

парного порядку $M + 1$;

3) число гармонік N в області 1 ($y > 0$) треба вибирати таким же, як і порядок СЛАР, якщо M – непарне, або на 1 менше, якщо M – парне.

Було проведено аналогічні розрахунки середньої відносної похибки ε методу частинних областей відносно методу факторизації при інших v . При $v = 2$ отримали такі ж закономірності, як і при $v = 1$. При $v = 0,5$ третя закономірність виконується при $M \geq 10$. Отже, при різних значеннях v розв'язки СЛАР непарного порядку M при застосуванні методу частинних областей будуть мати більшу точність, ніж при $M + 1$.

Таблиця 1. Значення середньої похибки $\varepsilon \cdot 10^3$ методу частинних областей відносно методу факторизації

N	Значення M											
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	11,095	11,876										
4	5,503	6,902	8,171	8,540								
5	2,543	3,183	5,571	6,107								
6	5,106	3,245	3,100	3,985	4,905	5,190						
7	6,008	4,560	1,531	1,877	3,504	3,895						
8	6,640	5,336	3,175	2,089	2,045	2,667						
9			3,825	3,002	1,058	1,269	2,464	2,764				
10			4,300	3,572	2,217	1,487	1,476	1,943				
11					2,712	2,168	0,791	0,930	1,854	2,093		
12							1,661	1,128	1,128	1,496		
13							2,053	1,660	0,620	0,718	1,460	1,656
14							2,353	2,013	1,305	0,893	0,898	1,198
15									1,625	1,324	0,504	0,576
16									1,874	1,615	1,060	0,730
17											1,328	1,088
18											1,538	1,333

Наведені результати дають похибку на всьому інтервалі φ від 0 до π . Тому вона і названа середньою похибкою ДХ. Знайдемо тепер залежність відносної похибки $\varepsilon = \frac{k_{\text{факт}} - k_{\text{ч.о}}}{k_{\text{факт}}}$

від $\frac{\varphi}{\pi}$ при певних значеннях M і N . На рис. 3 зображено залежність відносної похибки ε для СЛАР 5-го порядку при $N = 3, 4, 5, 6, 7$. Можна переконатися в тому, що найбільшу точність (найменше ε) мають розрахунки при числі гармонік $N = 5$. На рис. 4 зображено залежність $\varepsilon\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)$ при $M = 5, 7, 9, 11$ і $N = 5, 7, 9, 11$,

відповідно, при $\nu = 0,5$ (рис. 4, а), $\nu = 1$ (рис. 4, б) і $\nu = 2$ (рис. 4, в). Очевидно, що найбільша різниця припадає приблизно на середину смуги пропускання. При цьому значення $\frac{\varphi}{\pi}$, при якому вона максимальна, залежить

певним чином від параметра ν : при $\nu = 1$ це значення знаходиться майже рівно посередині смуги пропускання, при $\nu < 1$ – зсувається ліворуч, при $\nu > 1$ – праворуч.

Отже, застосовуючи метод частинних областей, необхідно розв'язувати СЛАР більшого (але відносно невеликого) порядку. Але цей метод може бути використаний при довільній товщині пластин, тобто має ширшу область застосування.

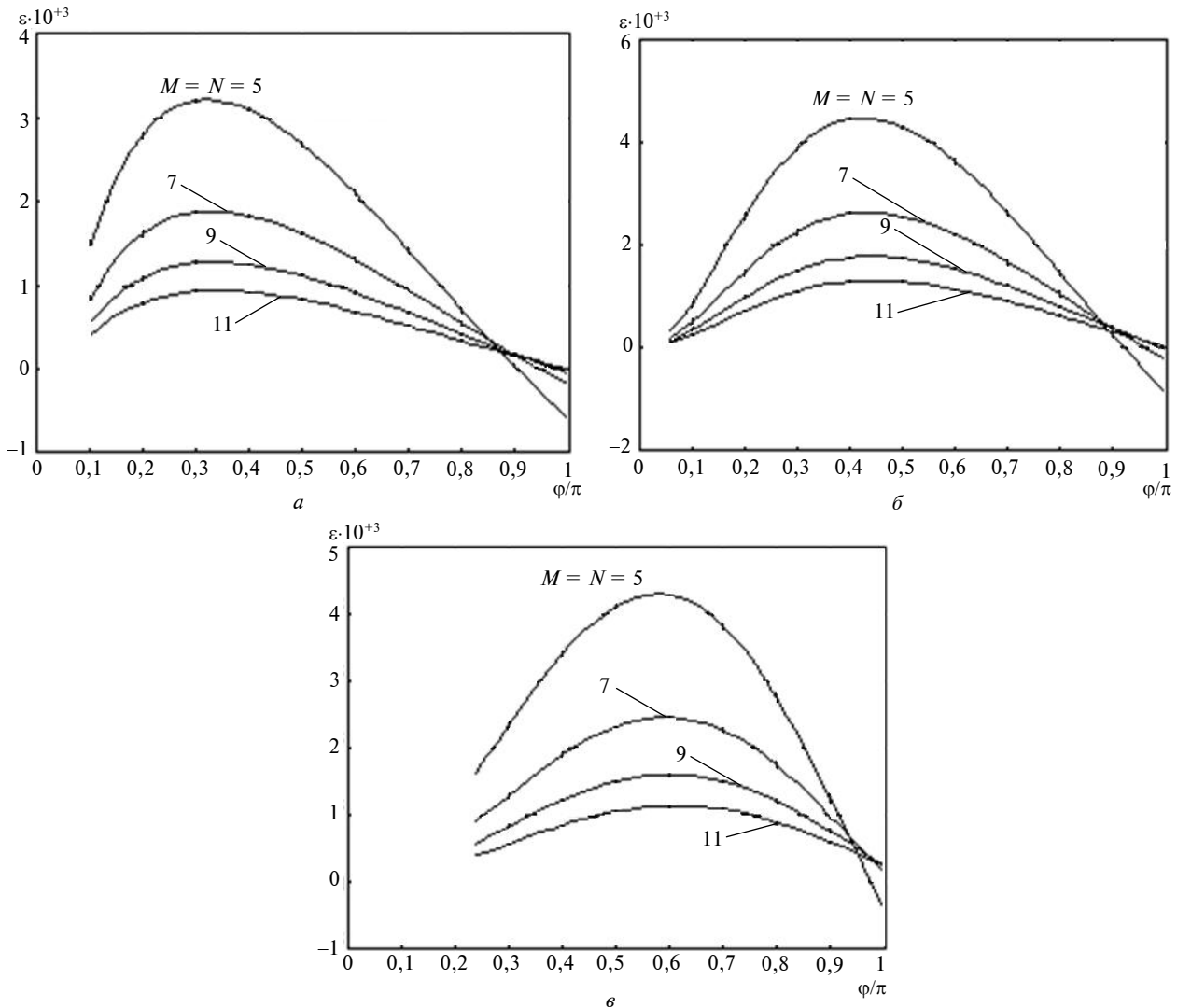


Рис. 4. Залежність похибки $\varepsilon\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)$ від числа гармонік N та порядку СЛАР M для: а – $\nu = 0,5$; б – $\nu = 1$; в – $\nu = 2$

Таблиця 2. Розраховані значення ka двома методами ($\nu = 1$)

$\frac{\varphi}{\pi}$	$k_{\text{ч.о}} a$				$k_{\text{факт}} a$
	$M = N = 5$	$M = N = 7$	$M = N = 9$	$M = N = 11$	
0,058	0,180352849	0,1803778305	0,1803889672	0,1803950125	0,1804107199
0,158	0,4632308037	0,4636027029	0,4637695781	0,4638605239	0,4640985518
0,278	0,7301597019	0,7312999947	0,7318177497	0,7321020743	0,7328585109
0,398	0,9239010608	0,9256121404	0,9264009101	0,9268384584	0,9280291914
0,518	1,0626297483	1,0644384848	1,0652908544	1,0657706907	1,0671198398
0,638	1,1604945772	1,1619466435	1,1626601325	1,1630725832	1,1642980874
0,758	1,2262845589	1,2270622681	1,2274943497	1,2277616114	1,2286579337
0,878	1,2649695759	1,2649294852	1,2650156586	1,265102082	1,2655696887
0,998	1,2789559511	1,2781300855	1,2778841754	1,2777964579	1,2778433975

Отриманий результат суперечить наведеному в [1] щодо переваг СЛАР (2) над СЛАР для амплітуд просторових гармонік (12) з [1], оскільки має виконуватись рівність $N = M$. З цієї точки зору СЛАР (2) (або (11) з [1]) і СЛАР (12) з [1] еквівалентні. У цілому найбільше значення відносної похибки $\varepsilon\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)$ при

$M = N \geq 11$ знаходиться на рівні $1 \cdot 10^{-3}$, що можна вважати цілком задовільним. Поблизу меж смуги пропускання вона істотно менша. Як видно з рис. 2, на якому зображена ДХ $n_{\text{ч.о}}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$, знайдена методом частинних областей для першої смуги пропускання при $N = M = 11$, графіки ДХ для обох методів практично збігаються. Сповіднення $n_{\text{ч.о}}$ знаходимо за формулою $n_{\text{ч.о}} = \frac{\pi \sigma}{ka \nu} \varphi$. Розраховані значення ka для обох методів при деяких значеннях $\frac{\varphi}{\pi}$ наведені в табл. 2.

Висновки

Для досить точного знаходження дисперсійної характеристики відкритої гребінки мето-

дом факторизації другий порядок СЛАР є достатнім. Запропонований алгоритм оцінки похибки розрахунку дисперсійної характеристики відкритої гребінки методом частинних областей на основі середньої похибки виявився достатньо інформативним. Для наближення результатів розрахунків, знайдених методом частинних областей, до розрахунків, знайдених методом факторизації, потрібно використовувати СЛАР більшого (але відносно невеликого) порядку. Із збільшенням порядку СЛАР при застосуванні методу частинних областей точність знайдених розв'язків ДР збільшується. СЛАР непарного порядку M дає меншу середню похибку, порівняно із СЛАР більшого парного порядку $M + 1$. Число гармонік N в області 1 треба вибирати таким же, як і порядок СЛАР, якщо M – непарне, або на 1 менше, якщо M – парне. Найбільша відносна різниця обох методів припадає на середину смуги пропускання.

Можна очікувати, що наведені рекомендації щодо співвідношення порядку СЛАР і числа врахованих гармонік будуть такими ж або близькими і для гребінки із скінченною товщиною гребенів. У перспективі буде розроблюватися метод для найточнішого розрахунку дисперсії гребінки з гребнями скінченної товщини та інших більш складних періодичних структур.

В.И. Найденко, А.С. Постульга

ТОЧНОСТЬ РАСЧЕТА ДИСПЕРСИИ ОТКРЫТОЙ ГРЕБЕНКИ С БЕСКОНЕЧНО ТОНКИМИ ГРЕБНЯМИ

Получены соотношения между порядком системы линейных алгебраических уравнений для амплитуд колебаний в резонаторах и числом учтен-

V.I. Naidenko, O.S. Postulga

COMPUTATION ACCURACY OF DISPERSION CHARACTERISTIC OF OPEN COMB WITH COMBS OF INFINITE THICKNESS

This paper deals with ratios between the order of the system of linear algebraic equations for the amplitudes of oscillations in resonators and the num-

ных пространственных гармоник, при которых найдены решения дисперсионного уравнения методом частичных областей для открытой гребенки с бесконечно тонкими гребнями наиболее точны. Найдена зависимость относительной разности решений дисперсионного уравнения метода частичных областей и метода факторизации от фазового сдвига нулевой пространственной гармоники на периоде гребенки.

ber of accountable space harmonics that give the most precise solution of dispersion equation for open comb with combs of infinite thickness, using the method of partial areas. We also reveal the dependence between relative difference of the method of partial areas and the factorization method as well as phase shift of zero space harmonic at the period of the comb.

1. *Найденко В.И.* Характеристики собственных волн открытой гребенки // Радиоэлектроника. – 2010. – 53, № 2. – С. 16–27.
2. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. – М.: Сов. радио, 1966. – 254 с.
3. *Шестопалов В.П.* Дифракционная электроника. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1976. – 232 с.
4. *Русин Ф.С., Богомолов Г.Д.* Колебательная система оротрона // Электроника больших мощностей. – М.: Наука, 1968. – Вып. 5. – С. 34–44.

Рекомендована Радою
радіотехнічного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
14 травня 2010 року