УДК 517.977

О.А. Капустян, В.В. Ясінський

НАБЛИЖЕНИЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ СУБДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

The article considers the problem of optimal stabilization for an evolution inclusion of subdifferential type with non-Lipschitz multi-valued interaction function of $\varepsilon \cdot F(y)$, where $\varepsilon > 0$ – small parameter. Provided that $\varepsilon = 0$ problem allows an optimal regulator $u[y]$, we prove that the formula $u[y]$ provides an approximate stabilization of the initial problem for small $\varepsilon > 0$. The obtained results permit us to expand a range of methods for solution of infinite-dimensional evolution problems with discontinuous and multi-valued coefficients and to study the issues of forecasting and control of complex objects relying on systematic approach.

Вступ

Розглядається задача оптимальної стабілізації для еволюційного включення із субдиференціальною головною частиною $-\partial\varphi$ та неліпшицевим багатозначним збуренням $\varepsilon \cdot F(y)$, де $\varepsilon > 0$ – малий параметр. Методи розв'язання нескінченновимірних еволюційних задач із розривними та багатозначними коефіцієнтами активно розвиваються починаючи з 70-х років минулого століття [1–3] у зв'язку з численними застосуваннями в механіці та фізиці. Системний підхід до вивчення питань розв'язності, прогнозування та керованості для таких об'єктів було розвинено в працях [4–7].

У статті з'ясовуються умови на відображення φ і F, за яких формула точного регулятора цієї задачі при $\varepsilon = 0$ дає наближений розв'язок вихідної задачі стабілізації при малих $\varepsilon > 0$.

Задача наближеного синтезу для таких об'єктів на скінченному проміжку часу розв'язана в [8], задача наближеної стабілізації для включення параболічного типу – в [9].

Мета роботи – обґрунтувати для керованого еволюційного включення субдиференціального типу на нескінченному часовому проміжку процедури наближеної стабілізації, виходячи з точної форми оптимального регулятора незбуреної задачі.

Постановка задачі

Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ – норма і скалярний добуток в H, $\varphi : H \to (-\infty; +\infty]$ – власна, опукла, напівнеперервна знизу функція, $cl_H(D(\varphi)) = H$, $\partial\varphi$ – її субдиференціал, $C_v(H)$ – сукупність замкнених, опуклих, обмежених підмножин H, $F : H \to C_v(H)$ – багатозначне відображення, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $g \in H$.

Розглядається задача стабілізації

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon F(y(t)) + g \cdot u(t), \ t > 0, \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(\cdot) \in U \subseteq L^2(0, +\infty) \text{ замкнена, опукла, } 0 \in U, \tag{2}$$

$$J(y,u) = \int_0^{+\infty} (y(t)^2 + \gamma u^2(t))dt \to \inf. \tag{3}$$

Нехай $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ – оптимальний процес в (1)–(3), $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$. Нехай при $\varepsilon = 0$ відома формула оптимального регулятора $u[y]$. Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon F(y(t)) + g \cdot u[y(t)], \ t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

Нехай $\hat{y}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (4), $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}^\varepsilon, u[\hat{y}^\varepsilon])$.

Мета роботи – обґрунтувати граничну рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\tilde{J}_\varepsilon - \hat{J}_\varepsilon| = 0. \tag{5}$$

Рівність (5) означає, що ми можемо коректно використовувати формулу регулятора незбуреної задачі (при $\varepsilon = 0$) для наближеної стабілізації вихідної (збуреної) задачі.

Зауважимо, якщо

$$\varphi(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\Delta u|^2dx, \ u\in H_0^1(\Omega),\\ +\infty \text{ в іншому випадку,}\end{cases}$$

$\partial\varphi(u)=-\Delta u$ і маємо включення параболічного типу, розглянуте в [9]. Проте в багатьох задачах механіки та фізики з вільною межею [1, 2] та в процесах, які описують потік однорідного газу через однорідне пористе середовище [3], виникають крайові задачі вигляду

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}-\Delta\beta(u)\in f \text{ на } (0,+\infty)\times\Omega,\\ \beta(u(t,x))\in 0 \text{ на } (0,+\infty)\times\Omega,\end{cases} \tag{6}$$

де $\beta=\partial j$, $j:R\to R$ – неперервна, $\lim\limits_{|r|\to\infty}\frac{j(r)}{|r|}=\infty$.

Тоді (6) зводиться до включення вигляду

$$\frac{du}{dt}\in-\partial\varphi(u)+f,$$

де

$$\varphi(u)=\begin{cases}\int_{\Omega}j(u(x))\,dx, \ u\in L^1(\Omega),\ j(u)\in L^1(\Omega),\\ +\infty \text{ в іншому випадку}\end{cases}$$

з $\overline{D(\varphi)}=H^{-1}(\Omega)$.

Основні результати

Будемо розглядати такі умови на параметри задачі (1)–(3):

$$\forall R>0 \text{ множина } M_R=\{u\in H \,|\, \|u\|\le R,\ \varphi(u)\le R\} \text{ – компакт в } H, \tag{7}$$

$$F:H\to C_v(H) \text{ – напівнеперервна зверху,} \tag{8}$$

$$\exists C_1>0\ \forall u\in H\ \|F(u)\|_+:=\sup_{z\in F(u)}\|z\|\le \le C_1(1+\|u\|), \tag{9}$$

$$\exists C_2>0\ \forall u\in H\ \inf_{\xi\in F(u)}(\xi,u)\ge-C_2\|u\|^2, \tag{10}$$

$$\exists\delta>0,\ \exists K>0\ \ \forall y\in D(\partial\varphi),\ \forall u\in-\partial\varphi(y)$$

$$(u,y)\le-\delta\|y\|^2. \tag{11}$$

Задача (1)–(3) при $\varepsilon=0$ має єдиний розв'язок $\{\tilde y,\tilde u\}$, причому має місце закон оберненого зв'язку

$$\tilde u(t)=u[\tilde y(t)]. \tag{12}$$

Відображення $u:H\to H$ неперервне,

$$\sup_{y\ne0}\frac{|u[y]|}{\|y\|}<\frac{\delta}{\|g\|}. \tag{13}$$

Лема. За умов (7)–(11) задача (1)–(3) для достатньо малих $\varepsilon>0$ має розв'язок $\{\tilde y^\varepsilon,\tilde u^\varepsilon\}$.

Доведення. При фіксованому $u\in U$, $\|u\|_U^2:=\int_0^{+\infty}u^2(t)dt<\infty$ задача (1) для $\forall\varepsilon>0$ має принаймні один (сильний) розв'язок [7], для якого справедливі такі оцінки з константами $\delta_1>0$, $C>0$, які не залежать від $\varepsilon>0$:

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0),\ \forall t\ge s\ge0$$

$$\|y(t)\|^2\le\|y(s)\|^2e^{-\delta_1(t-s)}+C\int_s^t e^{-\delta_1(t-p)}u^2(p)\,dp\le$$

$$\le\|y(s)\|^2e^{-\delta_1(t-s)}+C\|u\|_U^2, \tag{14}$$

$$\int_s^t\|y(p)\|^2dp\le\frac{1}{\delta_1}\left(\|y(s)\|^2+C\int_s^t u^2(p)dp\right)\le$$

$$\le\frac{1}{\delta_1}(\|y(s)\|^2+C\|u\|_U^2). \tag{15}$$

З цих оцінок випливає, що $J(y,u)<\infty$. Нехай $\tilde J_\varepsilon$ – значення задачі (1)–(3). Виберемо $\{u_n\}\subset U$ так, щоб $J(y_n,u_n)\le\tilde J_\varepsilon+\frac{1}{n}$. Тоді $\|u_n\|_U^2\le\tilde J_\varepsilon+1$ $\forall n\ge n_0$. Отже, $\exists\,\tilde u\in U$ таке, що по підпослідовності $u_n\xrightarrow{w}\tilde u$ в $L^2(0,T)$ $\forall T>0$.

Надалі будемо позначати $y=I_\varepsilon(y_0,u)f$ – розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}\in-\partial\varphi(y(t))-\varepsilon f(t)+g\cdot u(t),\ t>0,\\ y(0)=y_0\in H,\end{cases} \tag{16}$$

де $f(t)\in F(y(t))$ майже скрізь. Тоді $y_n=$ $=I_\varepsilon(y_0,u_n)f_n$, $f_n(t)\in F(y_n(t))$ майже скрізь і за умовою (9) та оцінкою (14) $\|f_n(t)\| \le m$ майже скрізь. Тоді з [7] $f_n \xrightarrow{w} \tilde{f}$ в $L^2(0,T;H)$, $y_n \to \tilde{y}$ в $C([0,T];H)$, де $\tilde{y} = I_\varepsilon(y_0,\tilde{u})f$. В силу теореми Мазура [10]

$$f(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} cl_H (co \bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t)) \text{ майже скрізь}.$$

Отже, з умови (8) $f(t) \in F(\tilde{y}(t))$ майже скрізь. Таким чином, $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$ – допустимий процес у задачі (1)–(3) і з нерівності

$$J(y_n,u_n) \ge J_T(y_n,u_n) := \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \gamma\int_0^T u_n^2(t)\,dt$$

маємо $\forall T > 0$

$$\tilde{J}_\varepsilon \ge \varliminf_{n\to\infty} J_T(y_n,u_n) \ge \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt +$$

$$+\gamma \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T u_n^2(t)dt \ge J_T(\tilde{y},\tilde{u}).$$

Тому $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y},\tilde{u})$, отже, $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$ – оптимальний процес у задачі (1)–(3). Лема доведена.

Оскільки $y \mapsto u[y]$ – неперервне, $|u[y]| < < \dfrac{\delta}{\|g\|}\|y\|$, то згідно з [7] задача (4) має розв’язок, причому справедливі такі оцінки з константами $\delta_2 > 0$, $\tilde{C} > 0$, які не залежать від ε:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \forall t \ge s \ge 0$$

$$\|y(t)\|^2 \le e^{-\delta_2(t-s)}\|y(s)\|^2, |u[y(t)]| \le \tilde{C}\|y(t)\|, \quad (17)$$

з яких, зокрема, маємо, що $J(y,u[y]) < \infty$.

Теорема. Нехай виконані умови (7)–(13), $\{\tilde{y}^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon\}$ – оптимальний процес у задачі (1)–(3), $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon)$, $\hat{y}^\varepsilon$ – розв’язок задачі (4), $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}^\varepsilon,u[\hat{y}^\varepsilon])$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\tilde{J}_\varepsilon - \hat{J}_\varepsilon| = 0. \quad (18)$$

Доведення. Спочатку покажемо, що $\hat{J}_\varepsilon \to J_0$, $\varepsilon \to 0$, де $J_0 = J(\tilde{y},\tilde{u})$, $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$ – єдиний оптимальний процес у задачі (1)–(3) при $\varepsilon = 0$.

Нехай $\hat{y}^\varepsilon$ – розв’язок задачі (4), $\hat{y}^\varepsilon = = I_\varepsilon(y_0,u[\hat{y}^\varepsilon])f_\varepsilon$, $f_\varepsilon(t) \in F(\hat{y}^\varepsilon(t))$ майже скрізь. З оцінок (17) і умови (9) випливає, що $\|f_n(t)\| \le m$ майже скрізь. Тоді з [7] отримаємо, що $\hat{y}^\varepsilon \to \hat{y}$ в $u[\hat{y}^\varepsilon(t)] \to u[\hat{y}(t)]$ $\forall t \in [0,T]$, тобто $\hat{y}$ – розв’язок задачі (4) при $\varepsilon = 0$. В силу максимальної монотонності $\partial\varphi$ [3] задача (4) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв’язок. Тому в силу (12) $J_0 = J(\hat{y},u[\hat{y}])$, тобто $\{\hat{y},u[\hat{y}]\}$ – оптимальний процес в (1)–(3) при $\varepsilon = 0$.

З оцінок (17) маємо, що $\forall t \ge 0$

$$\|\hat{y}^\varepsilon(t)\|^2 + \gamma u^2[\hat{y}^\varepsilon(t)] \le e^{-\delta_2 t}\|y_0\|^2(1+\tilde{C}^2).$$

Оскільки $\forall t \ge 0$ $\|\hat{y}^\varepsilon(t)\| \to \|\hat{y}(t)\|$, $u^2[\hat{y}^\varepsilon(t)] \to \to u^2[\hat{y}(t)]$ при $\varepsilon \to 0$, то за теоремою Лебега

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y},u[\hat{y}]) = J_0. \quad (19)$$

Тепер покажемо, що $\tilde{J}_\varepsilon \to J_0$, $\varepsilon \to o$. Нехай $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon)$, де $\{\tilde{y}^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon\}$ – оптимальний процес в (1)–(3).

Тепер нехай z^ε – розв’язок задачі (1) з керуванням $u = 0 \in U$. Тоді з оптимальності $\tilde{u}^\varepsilon$ маємо

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_U^2 \le \frac{1}{\gamma} J(\tilde{u}^\varepsilon) \le \frac{1}{\gamma}\int_0^{+\infty} \|z^\varepsilon(t)\|^2 dt \le \frac{\|y_0\|^2}{\gamma\delta_1}. \quad (20)$$

Тоді, повторюючи попередні міркування, маємо, що існує $\tilde{u} \in U$ таке, що по підпослідовності $\forall T > 0$ $\tilde{u}^\varepsilon \xrightarrow{w} \tilde{u}$ в $L^2(0,T)$, $\tilde{y}^\varepsilon \to \tilde{y}$ в $C([0,T];H)$, де $\tilde{y}$ – розв’язок задачі (1) з $\varepsilon = 0$, $u = \tilde{u}$. Зокрема, $\forall T > 0$

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{J}_\varepsilon \ge \varliminf_{\varepsilon\to 0} J_T(\tilde{y}^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon) \ge J_T(\tilde{y},\tilde{u}),$$

тобто

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{J}_\varepsilon \ge J(\tilde{y},\tilde{u}). \quad (21)$$

За принципом оптимальності Беллмана $\forall T > 0$ процес $\{\tilde{y}^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon\}$ на $[T,\infty)$ є оптимальним для задачі (1)–(3) з початковими даними $(T, \tilde{y}^{\varepsilon}(T))$, отже,

$$\int_T^{+\infty} \| \tilde{y}^{\varepsilon}(t) \|^2 dt + \gamma \int_T^{+\infty} | \tilde{u}^{\varepsilon}(t) |^2 dt \le \int_T^{+\infty} \| p^{\varepsilon}(t) \|^2 dt, \quad (22)$$

де p^{ε} – розв'язок задачі (1) на $[T, +\infty)$ з керуванням $u = 0$ та початковими даними $(T, \tilde{y}^{\varepsilon}(T))$. З (14), (15) маємо

$$\int_T^{+\infty} \| p^{\varepsilon}(t) \|^2 dt \le \frac{1}{\delta_1} \| \tilde{y}^{\varepsilon}(T) \|^2. \quad (23)$$

Тепер зафіксуємо $u \in U$ і відповідний розв'язок w^{ε} задачі (1). Тоді аналогічно попереднім міркуванням $\forall T > 0$ $w^{\varepsilon} \to w$ в $C([0,T]; H)$, де $w \in C([0,+\infty); L^2(\Omega))$ – розв'язок задачі (1) при $\varepsilon = 0$ з керуванням u. Крім того,

$$\int_T^{+\infty} \| w^{\varepsilon}(t) \|^2 dt \le \frac{1}{\delta_1} \left(\| w^{\varepsilon}(T) \|^2 dt + C \int_T^{+\infty} u^2(t)\, dt \right). \quad (24)$$

Тоді з нерівності $\tilde{J}_{\varepsilon} \le J(w, u)$ та оцінок (22)–(24) $\forall T > 0$ маємо

$$J_T(\tilde{y}^{\varepsilon}, \tilde{u}^{\varepsilon}) \le \int_0^T \| w^{\varepsilon}(t) \|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} u^2(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\delta_1} \| w^{\varepsilon}(T) \|^2 + \frac{C}{\delta_1} \int_T^{+\infty} u^2(t) dt. \quad (25)$$

Звідси

$$J_T(\tilde{y}, \tilde{u}) \le \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, J_T(\tilde{y}^{\varepsilon}, \tilde{u}^{\varepsilon}) \le \frac{1}{\delta_1} \| w(T) \|^2 +$$

$$+ \int_0^T \| w(t) \|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} u^2(t)\, dt + \frac{C}{\delta_1} \int_T^{+\infty} u^2(t)\, dt. \quad (26)$$

Тоді при $T \to \infty$ маємо, що $J(\tilde{y}, \tilde{u}) \le J(w, u)$ $\forall u \in U$.

Отже, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – оптимальний процес в задачі (1)–(3) з $\varepsilon = 0$. Тепер у попередніх міркуваннях покладемо $u = \tilde{u}$. Тоді в силу єдиності $\tilde{w}^{\varepsilon} \to \tilde{y}$ в $C([0,T]; H)$ і маємо оцінку

$$\gamma\, \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int_0^{+\infty} | \tilde{u}^{\varepsilon}(t) |^2 dt \le$$

$$\le \int_0^{+\infty} \tilde{u}^2(t) dt + \frac{1}{\delta_1} | \tilde{y}(T) |^2 + \frac{C}{\delta_1} \int_T^{+\infty} \tilde{u}^2(t) dt, \quad (27)$$

з якої при $T \to \infty$ маємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int_0^{+\infty} | \tilde{u}^{\varepsilon}(t) |^2 dt \le \int_0^{+\infty} \tilde{u}^2(t)\, dt.$$

Таким чином, $\tilde{u}^{\varepsilon} \to \tilde{u}$ в $L^2(0, +\infty)$ і оскільки

$$\tilde{J}_{\varepsilon} \le J_T(\tilde{y}^{\varepsilon}, \tilde{u}^{\varepsilon}) + \frac{1}{\delta_1} \| \tilde{y}^{\varepsilon}(T) \|^2,$$

то

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, \tilde{J}_{\varepsilon} \le J_T(\tilde{y}, \tilde{u}) + \frac{1}{\delta_1} \| \tilde{y}(T) \|^2.$$

Отже, при $T \to \infty$ одержуємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, \tilde{J}_{\varepsilon} \le J(\tilde{y}, \tilde{u}) = J_0,$$

що разом із (21) гарантує збіжність $\tilde{J}_{\varepsilon} \to J_0$, $\varepsilon \to 0$. Припускаючи від супротивного, що збіжність йде не по всій послідовності $\varepsilon \to 0$, можемо повторити попередні міркування і в силу єдиності оптимального процесу $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ прийти до протиріччя. Теорему доведено.

Висновки

У статті для керованого еволюційного включення субдиференціального типу на нескінченному часовому проміжку обґрунтовано процедуру наближеної стабілізації, виходячи з точної форми оптимального регулятора незбуреної задачі.

Отримані результати дають можливість розширити арсенал методів розв'язання нескінченновимірних еволюційних задач з розривними і багатозначними коефіцієнтами та, на основі системного підходу, вивчати питання прогнозування та керованості складних об'єктів.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Пер. с фр. Л.Р. Волевича. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 382 с.

3. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. – Leyden: Noordhoff, 1976. – 360 p.
4. *Иваненко В.И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с.
5. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 588 с.
6. *Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S., Kasyanov P.O.* Evolution inclusions and variational inequalities for Earth data processing. – N.Y.: Springer, 2011. – 250 p.
7. *Global* attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O.V. Kapustyan, V.S. Mel'nik, J. Valero, V.V. Yasinsky. – K.: Наук. думка, 2008. – 216 p.
8. *Ясінський В.В., Капустян О.А.* Наближені екстремальні розв'язки для еволюційних включень субдиференціального типу // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 4. – С. 109–116.
9. *Капустян О.А.* Задача наближеної стабілізації для параболічного включення // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2011. – № 1. – С. 62–67.
10. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
17 лютого 2012 року