УДК 519.21

А.Б. Ільєнко

# ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ ДЛЯ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ДРОБОВИХ ПРОЦЕСІВ

In this paper, we study the rate of convergence of the normalized integrals of stationary shot noise processes in the central limit theorem. More precisely, we establish an estimate for the distance between pre-limit distribution functions of the normalized integrals and limit Gaussian one. The key machinery of the proof is the study of convergence rates in terms of characteristic functions with a subsequent use of Berry-Esseen bound. We also give an analogous estimate of convergence rates in Lévy metric and an estimate for integrals with explicit normalization. The convergence rate in the bound obtained in Theorem 3 turns out to depend on the spectral characteristics of the input Lévy process and of the response function. The key role is played here by the behavior of the Fourier transform of the response function in the neighborhood of origin. The estimates obtained are of both theoretical and practical interest. They can be used in statistics of shot noise processes, specifically in testing hypotheses concerning unknown response function.

## Вступ

Дробові процеси є математичною моделлю різноманітних фізичних та економічних явищ. Починаючи з піонерських праць С.О. Райса [1, 2], вони давно й активно використовуються при статистичному моделюванні в електроніці [3, 4], оптиці [5], радіофізиці [6], при дослідженні надійності комп'ютерних систем [7], в страховій математиці [8, 9] та багатьох інших галузях. Таку розповсюдженість дробових процесів можна пояснити їх прозорою фізичною інтерпретацією: вони описують реакцію лінійної системи на вхідний випадковий сигнал, якщо останній є процесом з незалежними приростами.

Дослідженню статистичних властивостей дробових процесів присвячено багато літератури. У цьому зв'язку відзначимо п'ятий розділ у монографії [10], а також праці автора [11, 12]. Зокрема, в [12] одержано різні варіанти центральних і нецентральних граничних теорем для інтегральних вибіркових середніх таких процесів. У цій публікації ми досліджуємо питання швидкості збіжності в центральній граничній теоремі. Іншими словами, нас цікавить оцінка відстані між (дограничними) розподілами нормованих інтегралів від дробових процесів та (граничним) гауссовим розподілом. Такі оцінки становлять теоретичний інтерес, а також можуть знайти застосування при статистичному оцінюванні параметрів дробових процесів.

Цю роботу виконано в рамках д/б теми “Псевдорегулярні та спеціальні функції і їх застосування до задач стохастичного аналізу”, № 2500 ф.

## Постановка задачі

Нехай $\xi = (\xi(s),\, s \in \mathbb{R})$ – заданий на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ процес Леві, тобто дійснозначний стохастично неперервний однорідний випадковий процес з незалежними приростами з $\xi(0) = 0$. Такий процес може бути зображений у вигляді $\xi(\cdot) = \xi_{ng}(\cdot) + \sigma w(\cdot)$, де $\xi_{ng}$ – негауссівська частина, $w$ – стандартний вінерівський процес, $\sigma \ge 0$. Оскільки гауссівська компонента $w$ не може якимось чином погіршити швидкість збіжності вибіркових середніх до гауссового ж граничного розподілу, ми будемо всюди надалі вважати, що $\sigma = 0$. Крім того, будемо завжди вважати процес $\xi$ центрованим: $\mathbf{E}\xi(\cdot) = 0$.

Позначимо через $\Pi$ міру Леві цього процесу (див., наприклад, [10]), а через $\Pi_r$, $r \ge 0$, її абсолютні моменти: $\Pi_r = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \, \Pi(dx)$. Скінченність таких моментів забезпечує скінченність відповідних моментів процесу $\xi$. Зокрема, умова $\Pi_2 < \infty$ гарантує, що $\mathbf{E}\xi^2(t) < \infty$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$.

Для невипадкової дійсної функції $g = (g(t),\, t \in \mathbb{R}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ коректно визначено стохастичний інтеграл

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\, d\xi(s), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

який задає стаціонарний *дробовий процес* $\theta$ з *функцією відгуку* $g$ та *вхідним процесом* Леві $\xi$. Ми розглядаємо інтеграл у формулі (1) як інтеграл Вінера за процесом з ортогональними приростами. Заданий у такий спосіб процес $\theta$ є стаціонарним у строгому сенсі.

Основним об'єктом цього дослідження є інтеграли вигляду $\Theta(T)=\int_0^T \theta(u)du$, які ми розглядаємо як $\mathbf{L}_2(\Omega)$ – інтеграли Рімана. Ці інтеграли будуть коректно визначеними за умови, що $\mathbf{E}\xi^2(\cdot)<\infty$, або, що еквівалентно, $\Pi_2<\infty$. Всюди надалі ми будемо вважати цю умову виконаною.

У праці [12], зокрема, було доведено таке твердження.

**Теорема** 1. Якщо виконано умову

$$\sup_{T>0}\mathbf{E}\Theta^2(T)=\infty,$$

то випадкові величини $\Theta(T),\, t>0,$ підлягають центральній граничній теоремі: $\frac{\Theta(T)}{\sqrt{\mathbf{E}\Theta^2(T)}}\xrightarrow[T\to\infty]{d}\gamma_0$, де $\gamma_0$ – стандартна гаусівська випадкова величина, а знак $\xrightarrow{d}$ означає збіжність за розподілом.

У цій роботі ми досліджуємо питання про швидкість збіжності в цій теоремі в рівномірній метриці. Іншими словами, ми вивчаємо порядок збіжності до нуля величин

$$\Delta(T)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\left\{\frac{\Theta(T)}{\sqrt{\mathbf{E}\Theta^2(T)}}\le x\right\}-\Phi(x)\right|, \qquad (2)$$

де через $\Phi(x)$ позначено функцію Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\{-t^2/2\}dt.$$

**Попередні відомості про дробові процеси**

Наведемо деякі результати стосовно процесів Леві та дробових процесів, які будуть потрібні в подальшому. Їх доведення можна знайти в [10], а також в [11, 12].

Будемо позначати через $\mathrm{E}(y)$ вираз $e^{iy}-1-iy$. Характеристична функція випадкової величини $\Theta(T)$ задається співвідношенням

$$\varphi_T(\lambda)=\mathbf{E}e^{i\lambda\Theta(T)}=$$
$$=\exp\iint_{\mathbb{R}^2}\mathrm{E}\left(\lambda x\int_s^{s+T}g(u)du\right)ds\,\Pi(dx),$$
$$\lambda\in\mathbb{R},\quad T>0. \qquad (3)$$

Диференціюванням цієї формули можна отримати вигляд другого моменту величини $\Theta(T)$:

$$\mathbf{E}\Theta^2(T)=\Pi_2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T}g(u)du\right]^2ds. \qquad (4)$$

З означення дробового процесу (1), користуючись властивостями інтеграла Вінера, можна одержати вигляд кореляційної функції процесу $\theta$:

$$B(\tau)=\mathbf{E}\theta(t)\theta(t+\tau)=\Pi_2\int_{-\infty}^{\infty}g(s)g(s+\tau)ds=$$
$$=\Pi_2(g*g_-)(\tau),\quad \tau,t\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

Тут позначено $g_-(s)=g(-s),\, s\in\mathbb{R}$, а "$*$" означає згортку функцій.

У спектральних термінах співвідношення (5) набуває такого вигляду:

$$B(\tau)=\frac{\Pi_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(\lambda)|^2e^{i\lambda\tau}d\tau,\quad \tau\in\mathbb{R},$$

де через $\hat{g}$ позначено перетворення Фур'є–Планшереля функції $g$. З цієї формули можна одразу зробити висновок, що спектральна щільність процесу $\theta$ має вигляд

$$f_\theta(\lambda)=\frac{\Pi_2}{2\pi}|\hat{g}(\lambda)|^2,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

У випадку $g\in\mathbf{L}_1(\mathbb{R})\cap\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ перетворення Фур'є–Планшереля переходить у звичайне перетворення Фур'є. Все це пояснює, чому в основних результатах цієї роботи умови на функцію відгуку виражаються у формі її перетворення Фур'є.

Наведемо, нарешті, ще один потрібний нам надалі результат з [11], який стосується швидкості зростання моментів $\mathbf{E}\Theta^2(T)$ при $T\to\infty$. Ми сформулюємо його не в загальному вигляді, а лише в тому частинному випадку, який нам буде потрібний далі.

**Теорема** 2. Нехай для деякого $\alpha\in[0;1/2)$

$$\hat{g}(\lambda)=C\lambda^\alpha+o(\lambda^\alpha),\quad \lambda\to+0,\quad C\ne 0. \qquad (6)$$

Тоді при $T\to\infty$ виконується асимптотична рівність $\mathbf{E}\Theta^2(T)\sim\Pi_2C^2\mathrm{K}(\alpha)T^{1-2\alpha}$. Тут позначено

$$\mathrm{K}(\alpha)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha-2}\sin^2\frac{\lambda}{2}\,d\lambda=\frac{\sec(\alpha\pi)}{\Gamma(2-2\alpha)}, \qquad (7)$$

де $\Gamma$ – гама-функція Ейлера.

Зауважимо, що наведене значення інтеграла в формулі (7) відсутнє в [11], але є результатом нескладного інтегрування за параметром.

**Оцінки швидкості збіжності**

Тепер доведемо оцінку швидкості збіжності до нуля випадкових величин $\Delta(T)$, визначених формулою (2). При цьому використовуються деякі методи з праці [13].

**Теорема** 3. Нехай виконані такі умови:

1) $g \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$;

2) $\Pi_{2+\beta} < \infty$ для деякого $\beta > 0$;

3) для деякого $\alpha \in [0;1/2)$ виконується умова (6).

Тоді має місце оцінка $\Delta(T) \le L T^{-\frac{\beta_*(1-2\alpha)}{2}}$, де $\beta_* = \min\{\beta, 1\}$, а $L$ – деяке додатне число, яке залежить від функції $g$ та вхідного процесу Леві $\xi$.

Доведення. Нам будуть потрібні дві прості нерівності. По-перше, для будь-якого $\beta \in [0,1]$ має місце оцінка

$$|\mathrm{E}(y) + y^2/2| = |e^{iy} - 1 - iy + y^2/2| \le$$
$$\le \min\{|y|^2, |y|^3\} \le |y|^{2+\beta}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Крім того, з оцінки

$$|e^z - 1| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \le |z| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = |z|\, e^{|z|}, \quad z \in \mathbb{C},$$

одержуємо, що для всіх $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$|e^{z_1} - e^{z_2}| \le |z_1 - z_2| \cdot |e^{z_2}| \cdot e^{|z_1 - z_2|}. \tag{9}$$

Нехай $\psi_T(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ – характеристична функція випадкової величини $\dfrac{\Theta(T)}{\sqrt{\mathbf{E}\Theta^2(T)}}$. Тоді з формул (3) та (4), а також нерівності (8) одержуємо

$$\left|\mathrm{Ln}\, \psi_T(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2}\right| =$$
$$= \left| \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{E}\left[\left(\frac{\lambda x \int_s^{s+T} g(u)du}{\left(\Pi_2 \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} g(u)du\right]^2 ds\right)^{1/2}}\right) + \frac{\lambda^2 x^2 \left[\int_s^{s+T} g(u)du\right]^2}{2\Pi_2 \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} g(u)du\right]^2 ds}\right] ds\, \Pi(dx) \right| \le$$

$$\le \frac{\Pi_{2+\beta}\, |\lambda|^{2+\beta}}{\Pi_2^{1+\beta/2}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_s^{s+T} g(u)du\right|^{2+\beta} ds}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} g(u)du\right]^2 ds\right)^{1+\beta/2}} \le$$

$$\le \frac{\Pi_{2+\beta}\, |\lambda|^{2+\beta}}{\Pi_2^{1+\beta/2}} \frac{\sup_{s\in\mathbb{R}} \left|\int_s^{s+T} g(u)du\right|^{\beta}}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} g(u)du\right]^2 ds\right)^{\beta/2}} =$$
$$= R(T)\, |\lambda|^{2+\beta},$$

де через $\mathrm{Ln}$ позначено головне значення логарифма. За першою умовою теореми $g \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$ і чисельник у $R(T)$ є обмеженим за $T$, а знаменник внаслідок формули (4) і теореми 2 має при $T \to \infty$ порядок $T^{\frac{\beta(1-2\alpha)}{2}}$, тому $R(T) \sim T^{-\frac{\beta(1-2\alpha)}{2}}$, коли $T \to \infty$.

Із нерівності (9) маємо тепер

$$|\psi_T(\lambda) - \exp\{-\lambda^2/2\}| \le$$
$$\le R(T)\, |\lambda|^{2+\beta} \exp\{R(T)\, |\lambda|^{2+\beta} - \lambda^2/2\}.$$

Тому при $|\lambda| \le [4R(T)]^{-1/\beta}$ одержимо, що $R(T)\, |\lambda|^{2+\beta} \le \dfrac{\lambda^2}{4}$, і

$$|\psi_T(\lambda) - \exp\{-\lambda^2/2\}| \le$$
$$\le R(T)\, |\lambda|^{2+\beta} \exp\{-\lambda^2/4\}.$$

Тепер, обираючи в нерівності Беррі–Ессеєна (див., наприклад, [14]) константу $L = [4R(T)]^{-1/\beta}$, знаходимо

$$\Delta(T) \le \frac{2}{\pi}\int_0^L \left|\frac{\psi_T(\lambda) - \exp\{-\lambda^2/2\}}{\lambda}\right| d\lambda + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}L} \le$$
$$\le \frac{2}{\pi}\int_0^{[4R(T)]^{-1/\beta}} R(T)\, |\lambda|^{1+\beta} \exp\{-\lambda^2/4\} d\lambda +$$
$$+ \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} [4R(T)]^{1/\beta}.$$

Оскільки $\lim_{T\to\infty} R(T) = 0$, то перший доданок у правій частині має за $T$ такий самий порядок, як і $R(T)$, тобто $T^{-\frac{\beta(1-2\alpha)}{2}}$. Порядок другого доданка – $T^{-\frac{(1-2\alpha)}{2}}$. Звідси й випливає твердження теореми.

Зауважимо, що теорема 3 дає можливість знаходити оцінки швидкості збіжності також в інших метриках. Так, використовуючи результати з [15], аналогічні оцінки можна одержати для метрики Леві. Більш точно, справедливе таке твердження.

***Наслідок*** 1. В умовах і позначеннях теореми 3 при $\beta \in (0,1)$ та великих $T$ має місце оцінка

$$\mathrm{L}\left(\mathbf{P}\left\{\frac{\Theta(T)}{\sqrt{\mathbf{E}\Theta^2(T)}} \le \cdot\right\}, \Phi(\cdot)\right) \le \frac{L}{2} T^{-\beta(1-2\alpha)/2}.$$

Тут через $\mathrm{L}(F,G)$ позначено відстань між функціями розподілу $F$ і $G$ в метриці Леві.

Визначаючи рівномірну відстань між допграничними та граничною функціями розподілу формулою (2), ми використовували стандартне нормування випадкових величин $\Theta(T)$ їх власними середньоквадратичними відхиленнями $\sqrt{\mathbf{E}\Theta^2(T)}$. У практичних задачах, коли ці середньоквадратичні відхилення невідомі, потрібно використовувати явні нормування. Наведемо один наслідок з теореми 3 для таких явних нормувань. Ми обмежимося при цьому "центральним" випадком $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

**Теорема** 4. Нехай виконані такі умови:

1) $g \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$;

2) $\Pi_3 < \infty$ для деякого $\beta > 0$;

3) $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du \ne 0$;

4) перетворення Фур'є $|\hat{g}(\lambda)|$ задовольняє в нулі умову Гельдера з показником 1/2: для деяких $\lambda_0, C > 0$ і для всіх $\lambda \in [0, \lambda_0]$ виконується нерівність $\|\hat{g}(\lambda)| - |\hat{g}(0)\| \le C\sqrt{\lambda}$.

Тоді має місце оцінка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\left\{\frac{\Theta(T)}{\sqrt{T}} \le x\right\} - \Phi\left(\frac{x}{\mathrm{I}\sqrt{\Pi_2}}\right)\right| \le \frac{M}{\sqrt{T}},$$

де $\mathrm{I} = \left|\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du\right|$, а $M$ – деяке додатне число, яке залежить від функції $g$ та вхідного процесу Леві $\xi$.

Для доведення нам знадобиться наступне елементарне твердження.

**Лема** 1. Для будь-яких $\mu, \nu \ge a > 0$ справедлива оцінка

$$|\Phi(x/\nu) - \Phi(x/\mu)| \le D\,|\nu^2 - \mu^2|, \qquad (10)$$

де $D$ – константа, що залежить лише від $a$.

Доведення. Нехай для визначеності $\mu < \nu$ і $x > 0$. Тоді

$$\Phi(x/\mu) - \Phi(x/\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x/\nu}^{x/\mu} e^{-t^2/2}dt \le$$

$$\le \frac{\nu-\mu}{\nu\mu\sqrt{2\pi}}\sup_{x>0} xe^{-x^2/2\nu^2} = \frac{\nu-\mu}{\mu\sqrt{2\pi}}\sup_{x>0} xe^{-x^2/2} \le$$

$$\le \frac{\nu^2-\mu^2}{2\mu^2\sqrt{2\pi}}\sup_{x>0} xe^{-x^2/2} = \frac{\nu^2-\mu^2}{2\mu^2\sqrt{2\pi e}}.$$

Звідси та з аналогічної оцінки при $x < 0$ випливає (10) з $D = \frac{1}{2a^2\sqrt{2\pi e}}$. Лему доведено.

Доведення теореми 4. Позначимо через $\gamma(T)$ та $\gamma$ гауссівські випадкові величини з нульовими середніми та дисперсіями $\sigma^2(T) = \frac{\mathbf{E}\Theta^2(T)}{T}$ та $\sigma^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{\mathbf{E}\Theta^2(T)}{T} = \Pi_2 \mathrm{I}^2$. (Остання рівність випливає безпосередньо з теореми 2 при $\alpha = 0$, оскільки $|\hat{g}(0)| = \mathrm{I}$, $\mathrm{K}(0) = 1$). Оскільки

$$\mathbf{P}\{\gamma \le x\} = \Phi\left(\frac{x}{\mathrm{I}\sqrt{\Pi_2}}\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

то для доведення твердження теореми достатньо показати, що для деяких $M_1, M_2 > 0$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\left\{\frac{\Theta(T)}{\sqrt{T}} \le x\right\} - \mathbf{P}\{\gamma(T) \le x\}\right| \le \frac{M_1}{\sqrt{T}},\\ \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\{\gamma(T) \le x\} - \mathbf{P}\{\gamma \le x\}\right| \le \frac{M_2}{\sqrt{T}}.\end{gathered} \qquad (11)$$

Перша оцінка в (11) випливає з теореми 3 при $\alpha = 0$, $\beta = 1$ та рівностей

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\Theta(T)}{\sqrt{T}} \le x\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\Theta(T)}{\sqrt{\mathbf{E}\Theta^2(T)}} \le \frac{x\sqrt{T}}{\sqrt{\mathbf{E}\Theta^2(T)}}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\frac{\Theta(T)}{\sqrt{\mathbf{E}\Theta^2(T)}} \le \frac{x}{\sigma(T)}\right\},$$

$$\mathbf{P}\{\gamma(T) \le x\} = \Phi\left(\frac{x}{\sigma(T)}\right).$$

Другу оцінку в (11) перепишемо у вигляді

$$\sup_{x\in \mathbb{R}} \left| \Phi\left(\frac{x}{\sigma(T)}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| \le \frac{M_2}{\sqrt{T}}. \qquad (12)$$

Для доведення нерівності (12) внаслідок леми 1 та формули (4) достатньо показати, що

$$\left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} g(u)du\right]^2 ds}{T} - \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_s^{s+T} g(u)du\right]^2 ds}{T} \right| =$$

$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), \quad T\to\infty. \qquad (13)$$

Оцінку (13) легко переписати в термінах перетворення Фур'є:

$$\left| \frac{1}{T}\int_0^{\infty} \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2} \sin^2\frac{\lambda T}{2} d\lambda - \right.$$

$$\left. - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{\infty} \frac{|\hat{g}(\lambda)|^2}{\lambda^2} \sin^2\frac{\lambda T}{2} d\lambda \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right). \quad (14)$$

Оскільки інтеграли в оцінці (14) збігаються на нескінченності рівномірно за $T$, то їх достатньо розглядати лише за довільно малим околом нуля. Таким чином, (14) можна переписати у вигляді

$$\left| \int_0^{\lambda_0 T} \frac{|\hat{g}(\lambda/T)|^2}{\lambda^2} \sin^2\frac{\lambda}{2} d\lambda - \right.$$

$$\left. - \lim_{T\to\infty} \int_0^{\lambda_0 T} \frac{|\hat{g}(\lambda/T)|^2}{\lambda^2} \sin^2\frac{\lambda}{2} d\lambda \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right). \quad (15)$$

Границя в правій частині, очевидно, дорівнює $\int_0^{\infty} \frac{|\hat{g}(0)|^2}{\lambda^2}\sin^2\frac{\lambda}{2}d\lambda$, тому співвідношення (15) випливає з оцінок

$$\left| \int_0^{\lambda_0 T} \frac{|\hat{g}(\lambda/T)|^2}{\lambda^2} \sin^2\frac{\lambda}{2} d\lambda - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\lambda_0 T} \frac{|\hat{g}(0)|^2}{\lambda^2} \sin^2\frac{\lambda}{2} d\lambda \right| \le$$

$$\le 2\sup_{\lambda\in \mathbb{R}} |\hat{g}(\lambda)| \int_0^{\lambda_0 T} \frac{\| \hat{g}(\lambda/T)| - |\hat{g}(0)\|}{\lambda^2} \times$$

$$\times \sin^2\frac{\lambda}{2} d\lambda = O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right),$$

$$\left| \int_0^{\lambda_0 T} \frac{|\hat{g}(0)|^2}{\lambda^2} \sin^2\frac{\lambda}{2} d\lambda - \right. \qquad (16)$$

$$\left. - \int_0^{\infty} \frac{|\hat{g}(0)|^2}{\lambda^2} \sin^2\frac{\lambda}{2} d\lambda \right| = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

У свою чергу, перша оцінка в (16) випливає з умови 4 теореми 4 та збіжності інтеграла $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\lambda/2)}{\lambda^{3/2}}\, d\lambda$, а друга є очевидною. Теорему доведено.

**Висновки**

У роботі досліджувалася швидкість збіжності в центральній граничній теоремі для нормованих інтегралів від стаціонарних дробових процесів. За допомогою нерівності Беррі–Ессеєна одержано оцінку відстані між допграничними та граничною функціями розподілу в рівномірній метриці. Наведено також аналогічну оцінку в метриці Леві. Ці результати доповнюють і узагальнюють результати праць автора [11, 12], а також праці [13].

Основним здобутком роботи є теорема 3, в якій швидкість збіжності інтегралів $\Theta(T)$, нормованих дисперсіями, оцінюється через спектральні характеристики вхідного процесу Леві $\xi$ та функції відгуку $g$. Виявляється, що швидкість цієї збіжності тісно пов'язана з поведінкою перетворення Фур'є $\hat{g}$ функції відгуку $g$ в околі нуля. В теоремі 4 оцінку швидкості збіжності одержано для інтегралів $\Theta(T)$ з явними нормуваннями.

Отримані оцінки можуть бути в подальшому використані в задачах статистичного оцінювання параметрів дробових процесів, зокрема при розрізненні гіпотез стосовно невідомої функції відгуку.

Як один із напрямів подальших досліджень можна запропонувати вивчення оцінок швидкості збіжності в функціональній граничній теоремі, одержаній у статті [11].

1. *S.O. Rice,* "Mathematical analysis of random noise, I", Bell System Tech. Jour, vol. 23, pp. 282–332, 1944.
2. *S.O. Rice,* "Mathematical analysis of random noise, II", Bell System Tech. Jour., vol. 24, pp. 46–156, 1945.
3. *L. Takács,* "Über die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der Anodenstromschwankungen von Elektronenröhren", Acta Phys. Acad. Sci. Hung., vol. 7, pp. 25–50, 1957.
4. *Picinbono B. et al.,* "Photoelectron shot noise", J. Math. Phys., vol. 11, pp. 2166–2176, 1970.
5. *Dogliotti R. et al.,* "Error probability in optical fiber transmission systems", IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 25, pp. 170–178, 1979.
6. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
7. *P.A. Lewis,* "A branching Poisson process model for the analysis of computer failure patterns", Jour. Roy. Statist. Soc., vol. B26, pp. 398–456, 1964.
8. *C. Klüppelberg et al.,* "Explosive Poisson shot noise processes with applications to risk reserves", Bernoulli, vol. 1(1/2), pp. 125–147, 1995.
9. *C. Klüppelberg et al.,* "Delay in claim settlement and ruin probability approximations", Scand. Actuarial Jour., vol. 2, pp. 154–168, 1995.
10. *Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов. – К.: ТВіМС, 1998. – 290 с.
11. *Ільєнко А.Б.* Функціональна гранична теорема для процесів дробового ефекту // Теор. ймовірност. та матем. статист. – 2001. – 65. – С. 46–52.
12. *Ільєнко А.Б.* Про граничний розподіл інтегралів від дробових процесів // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 1. – С. 53–62.
13. *L. Heinrich et al.,* "Normal convergence of multidimensional shot noise and rates of this convergence", Adv. Applied Probability, vol. 17, pp. 709–730, 1985.
14. *Лоэв Е.* Теория вероятностей. — М.: Иностр. лит-ра, 1962. – 720 с.
15. *Золотарёв В.М.* Оценки различия распределений в метрике Леви // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1971. – 112. – С. 224–231.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
20 вересня 2012 року