

## ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 338.27

О.В. Братусь, В.М. Подладчиков

### ПОБУДОВА БАГАТОВИМІРНОЇ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ ФІЛЬТРА КАЛМАНА Й АНАЛІЗ АЛГОРИТМІВ ОЦІНЮВАННЯ ЇЇ ПАРАМЕТРІВ

In this paper, we construct the algorithms for estimating mathematical expectation of accelerating the values change of data sample. Simulation modeling is based on these algorithms for the random process. Based on its results, we analyze and choose best algorithms. We show that estimation of mathematical expectation of accelerating values change of data samples for constructed selective sequences of discrepancies does not show better results compared with its estimation based on a full sequence of discrepancies. Adaptive Kalman filter is constructed. Using real values of data, we build the model based on Kalman filter using the best algorithm of estimating mathematical expectation of accelerating values change of data samples, exponential smoothing model, autoregressive model and autoregressive moving average model. We make forecasts using these models. The model based on Kalman filter shows good results for statistical characteristics. Therefore, it is the best model for forecasting characteristics.

#### Вступ

Під час аналізу та прогнозування часових рядів зазвичай обробляються тільки значення часових рядів. Проте при розв'язанні прикладних задач велику інформаційну цінність може мати швидкість зміни значень часового ряду [1]. Тому в постановці задачі статті компонентами вектора стану є значення часового ряду та швидкість зміни цих значень.

Для розв'язання задач прогнозування часових рядів використовується модель у просторі станів, статистичні характеристики шумів якої невідомі і підлягають оцінюванню за реальними даними. Розглядаються такі параметри цієї моделі: математичне сподівання прискорення зміни значень вибірки даних, дисперсія прискорення зміни значень вибірки даних, дисперсія шуму вимірів.

Перші вагомі дослідження, що стосуються адаптивного фільтра Калмана, було зроблено в праці [2]. Пізніше іншими вченими було продовжено дослідження, що стосуються адаптивного фільтра Калмана для ідентифікації шумів [3]. Також проводились дослідження, що стосувались порівняння звичайного й адаптивного фільтрів Калмана, які показали переваги застосування адаптивного фільтра Калмана [4]. Подальше проведення досліджень для визначення ефективних алгоритмів оцінювання параметрів моделі на основі Калмана є актуальним на сьогодні, оскільки це може дати змогу отримувати більш точні результати при прогнозуванні часових рядів.

Для оцінювання невідомих параметрів у роботі використовується підхід, запропонований у праці [5]. Розглядаються нев'язки субоп-

тимального фільтра Калмана, побудовані для моделі вільної динамічної системи із фіксованою пам'яттю. Статистичні характеристики нев'язок такого фільтра є функціями невідомих параметрів моделі. Отримані оцінки використовуються для побудови адаптивного фільтра Калмана і розв'язку задач прогнозування.

Прогнозування цін на цинк є важливим для тих, хто займається купівлею та продажем металів на біржі металів. Тому аналіз і прогнозування середньодобових цін на цей метал становлять інтерес.

#### Постановка задачі

Мета роботи: 1) виконати побудову й аналіз алгоритмів оцінювання математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних; 2) побудувати адаптивний фільтр Калмана; 3) побудувати модель на основі фільтра Калмана з використанням вибраного раніше найкращого алгоритму оцінювання математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних, модель експоненційного згладжування, авторегресійну модель, авторегресійну модель із ковзним середнім за реальними даними, виконати за цими моделями прогнозування; 4) обчислити статистичні, прогнозні характеристики побудованих моделей і порівняти їх.

#### Основні дослідження і їх результати

Розглянемо математичну модель, що описується системою рівнянь, яка містить рівняння стану та рівняння вимірів.

Рівняння стану має вигляд [5]

$$\mathbf{X}_{i+1} = \Phi \mathbf{X}_i + \mathbf{G} a_i, \quad (1)$$

$$\text{де } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix},$$

$x_i$  –  $i$ -те значення вибірки даних,  $v_i$  – швидкість зміни  $i$ -го значення вибірки даних,  $T$  – проміжок часу між  $i$ -м і  $(i+1)$ -м станами;

$$E[a_i] = q^*,$$

$$E[(a_i - q^*)(a_k - q^*)] = (\sigma_a^*)^2 \delta(i - k),$$

де  $q^*$  – математичне сподівання прискорення зміни значень вибірки даних,  $\sigma_a^*$  – дисперсія прискорення зміни значень вибірки даних.

Рівняння вимірів має вигляд [5]

$$Z_i = \mathbf{H} \mathbf{X}_i + W_i, \quad (2)$$

де  $\mathbf{H} = [1 \ 0]$ ,  $E[W_i] = 0$ ,  $E[W_i W_k] = (\sigma^*)^2 \delta(i - k)$  ( $\sigma^*$  – дисперсія шуму вимірів, статистичні характеристики  $q^*$ ,  $\sigma_a^*$  і  $\sigma^*$  вважаються априорно невідомими).

Субоптимальна оцінка вектора стану фільтра з фіксованою пам'яттю  $n = 2$  обчислюється відповідно до формули [5]

$$\hat{\mathbf{X}}_i^{(2)} = \begin{bmatrix} Z_i \\ \frac{Z_i - Z_{i-1}}{T} \end{bmatrix}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Отримаємо значення нев'язки субоптимального фільтра за пам'яттю  $n = 2$ . Використаємо таку формулу [5]:

$$v_i^{(2)} = Z_i - \mathbf{H} \Phi \hat{\mathbf{X}}_{i-1}. \quad (3)$$

Підставляючи в рівняння (3) значення матриць  $\mathbf{H}$  і  $\Phi$ , отримаємо

$$\begin{aligned} v_i^{(2)} &= Z_i - (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{i-1} \\ \frac{Z_{i-1} - Z_{i-2}}{T} \end{pmatrix} = \\ &= Z_i - (1 \ T) \begin{pmatrix} Z_{i-1} \\ \frac{Z_{i-1} - Z_{i-2}}{T} \end{pmatrix} = Z_i - 2Z_{i-1} + Z_{i-2}. \quad (4) \end{aligned}$$

Проведене доведення й отриманий результат у формулі (4) підтверджують формулу нев'язки субоптимального фільтра за пам'яттю  $n = 2$ , отриману в [5]:

$$v_i^{(2)} = Z_i - 2Z_{i-1} + Z_{i-2}.$$

Середнє значення нев'язки обчислюється відповідно до формули [5]

$$E[v_i^{(2)}] = T^2 q^*.$$

Таким чином, математичне сподівання нев'язки субоптимального фільтра з фіксованою пам'яттю  $n = 2$  є функцією від вимірів невідомого математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних.

**Побудова й аналіз алгоритмів оцінювання математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних.** Параметри математичної моделі, що описується рівняннями (1), (2), вважаються априорно невідомими. Для здійснення прогнозування за цією моделлю необхідно отримати оцінку невідомих параметрів.

Важливим є отримання оцінки значення  $q$  – математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних, яку позначимо  $q^*$ . Для цього можна використовувати оцінку значень  $q^*$  на основі вибірки нев'язок з пам'яттю  $n = m$  за формулою [5]

$$\hat{q}^{(k)} = \frac{1}{kT^2} \sum_{i=1}^k v_i^{(m)}.$$

Алгоритм № 1 полягає в оцінюванні значення  $q^*$  за повною вибіркою нев'язок з пам'яттю  $n = 2$  за формулою

$$\hat{q}^{(i)} = \frac{1}{(i-2)T^2} \sum_{j=3}^i v_j^{(2)}$$

та в підстановці отриманих значень у математичну модель (1), (2) [5].

Алгоритм № 2 полягає в оцінюванні значення  $q^*$  за вибірковою послідовністю нев'язок із пам'яттю  $n = 2$ , де взято до розгляду нев'язки, номери яких утворюють послідовність  $i = 3, 5, 7, \dots$ , за формулою

$$\hat{q}^{(i)} = \frac{2}{(i-1)T^2} \sum_{j=1}^{\frac{i-1}{2}} v_{2j+1}^{(2)}$$

та в підстановці отриманих значень у математичну модель (1), (2) [5].

Алгоритм № 3 полягає в оцінюванні значення  $q^*$  за вибірковою послідовністю нев'язок з пам'яттю  $n = 2$ , де взято до розгляду нев'язки, номери яких утворюють послідовність  $i = 3, 6, 9, \dots$ , за формулою

$$\hat{q}^{(i)} = \frac{3}{iT^2} \sum_{j=1}^i v_{3j}^{(2)}$$

та в підстановці значень у математичну модель (1), (2) [5].

До розгляду запропоновано також алгоритм № 4, який полягає в оцінюванні значення  $q^*$  за вибірковою послідовністю нев'язок з пам'яттю  $n = 2$ , де взято до розгляду нев'язки, номери яких утворюють послідовність  $i = 3, 7, 11, \dots$ , за формулою

$$\hat{q}^{(i)} = \frac{4}{(i+1)T^2} \sum_{j=1}^{\frac{i+1}{4}} v_{4j-1}^{(2)}$$

та в підстановці отриманих значень у математичну модель (1), (2).

Алгоритм № 5 полягає в оцінюванні значення  $q^*$  за послідовністю нев'язок з пам'яттю  $n = 2$  за допомогою експоненційного згладжування за формулою

$$S_k = \alpha \cdot y(k) + (1 - \alpha) \cdot S_{k-1} \quad (5)$$

(де  $S_k$  – значення експоненційного середнього в  $k$ -й момент часу;  $\alpha$  – параметр згладжування;  $y(k)$  – значення ряду в  $k$ -й момент часу;  $S_{k-1}$  – значення експоненційного середнього в  $(k-1)$ -й момент часу [6]) зі значенням початкового наближення, обчисленим за формулою

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N y(k), \quad (6)$$

(де  $\bar{y}$  – вибіркове середнє;  $N$  – кількість значень ряду;  $y(k)$  – значення ряду в  $k$ -й момент часу [8]), та в підстановці отриманих значень у математичну модель (1), (2).

Алгоритм № 6 полягає в оцінюванні значення  $q^*$  за послідовністю нев'язок з пам'яттю  $n = 2$  за допомогою експоненційного згладжування за формулою (5) зі значенням початкового наближення, рівним першому значенню послідовності нев'язок, та в підстановці отриманих значень у математичну модель (1), (2).

Для порівняння розглянутих вище алгоритмів проведено імітаційне моделювання для моделі, що описується рівняннями (1), (2), для випадкового процесу для кількості точок

$N = 100$  та незмінного періоду часу  $T = 1$ , де параметри  $a_i$  і  $W_i$  визначаються за формулами

$$a_i = \text{randn}(1,1) \cdot \sqrt{(\sigma_a^*)^2 + q^*},$$

$$W_i = \text{randn}(1,1) \cdot \sqrt{(\sigma^*)^2},$$

де  $q^*$  – математичне сподівання прискорення зміни значень вибірки даних  $a_i$ ,  $(\sigma_a^*)^2$  – дисперсія прискорення зміни значень вибірки даних  $a_i$ ,  $(\sigma^*)^2$  – дисперсія шуму вимірів  $W_i$ ,  $\text{randn}(1,1)$  – генерування випадковим чином числа в діапазоні 1.

Як критерій оцінювання використовується значення статистичної дисперсії для математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних, обчислене за формулою

$$D[\hat{q}^{(i)}] = [q - \hat{q}^{(i)}]^2.$$

На рис. 1–4 наведено значення статистичної дисперсії, обчислені за значеннями оцінки  $\hat{q}^{(i)}$ , отриманими за алгоритмами № 1–6.

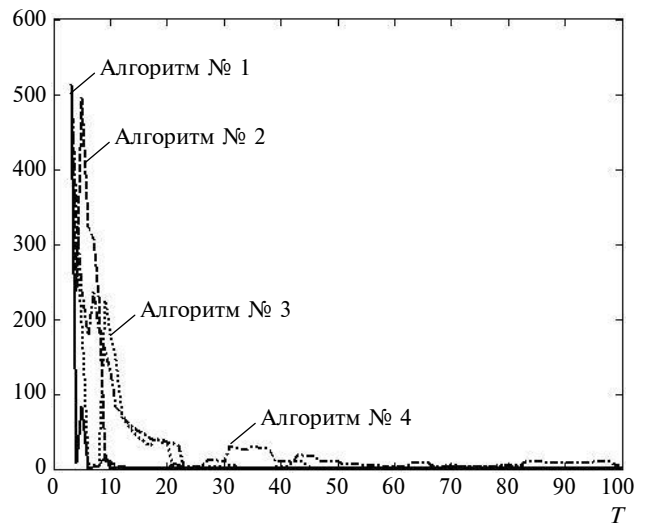


Рис. 1. Значення статистичної дисперсії  $D[\hat{q}^{(i)}]$  за початкових значень  $q^* = 1$ ,  $(\sigma_a^*)^2 = 10$ ,  $(\sigma^*)^2 = 50$  для алгоритмів № 1–4

Результати проведеного імітаційного моделювання, наведені на рис. 1–4, показують, що для всіх розглянутих алгоритмів значення статистичної дисперсії для математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних збігаються до нуля, що демонструє ефективність запропонованих алгоритмів. Показано, що за фіксованого значення  $q^*$  зі збіль-

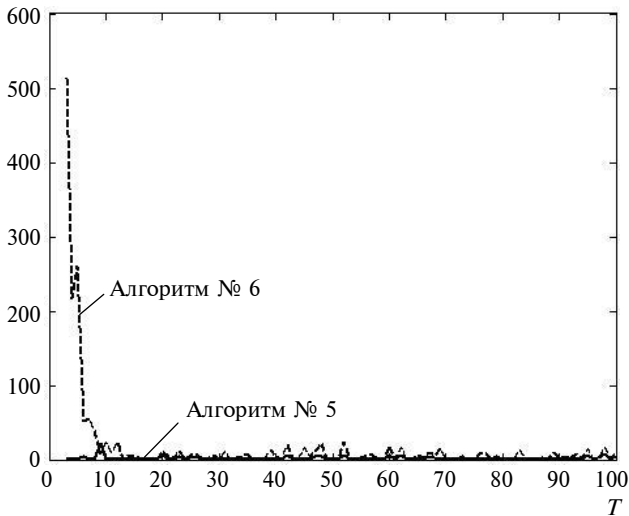


Рис. 2. Значення статистичної дисперсії  $D[\bar{q}^{(i)}]$  за початкових значень  $q^* = 1$ ,  $(\sigma_a^*)^2 = 10$ ,  $(\sigma^*)^2 = 50$  для алгоритмів № 5, 6

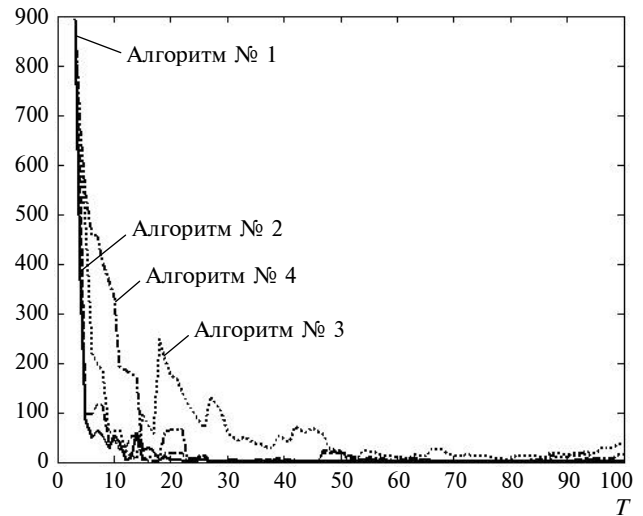


Рис. 3. Значення статистичної дисперсії  $D[\bar{q}^{(i)}]$  за початкових значень  $q^* = 10$ ,  $(\sigma_a^*)^2 = 50$ ,  $(\sigma^*)^2 = 100$  для алгоритмів №1–4

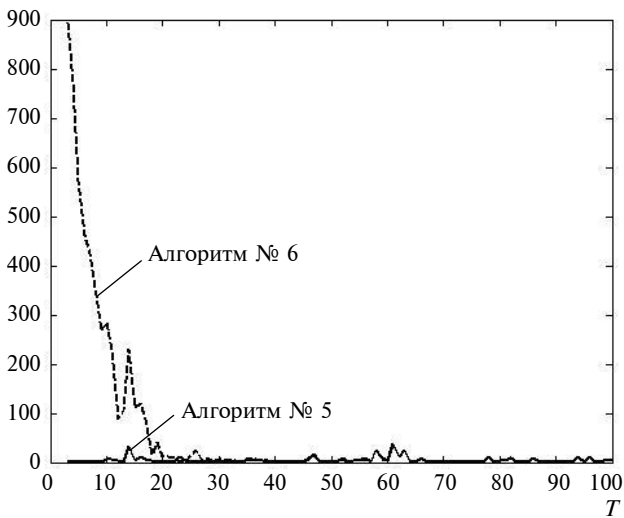


Рис. 4. Значення статистичної дисперсії  $D[\bar{q}^{(i)}]$  за початкових значень  $q^* = 10$ ,  $(\sigma_a^*)^2 = 50$ ,  $(\sigma^*)^2 = 100$  для алгоритмів № 5–6

шенням значень  $(\sigma_a^*)^2$  і  $(\sigma^*)^2$ , а також зі збільшенням різниці між цими значеннями збіжність значень статистичної дисперсії для математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних до нуля погіршується. За незмінних значень  $(\sigma_a^*)^2$  і  $(\sigma^*)^2$  зі збільшенням значення  $q^*$  збіжність значень статистичної дисперсії для математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних до нуля погіршується.

Також за результатами імітаційного моделювання зроблено висновок, що кращими є алгоритми № 1, 5 і 6. Показано, що оцінка значення  $q^*$  за побудованими вибірковими послідовностями нев'язок не призводить до покращення результатів порівняно з оцінкою значення  $q^*$  за повною послідовністю нев'язок.

#### *Прогнозування середньодобових цін на цинк.*

На основі вибірки даних (45 значень) про середньодобові ціни Лондонської біржі металів на цинк в американських доларах за тону з 1.08.2012 по 10.10.2012 у робочі дні [7] необхідно виконати прогнозування на наступні п'ять робочих днів.

Спираючись на результати, отримані раніше в цій статті, та проведені практичні дослідження відносно динаміки зміни цін на цинк для побудови математичної моделі та прогнозування за нею для знаходження значень  $q^*$  використаємо алгоритм № 5. Після цього знайдені значення  $q^*$  підставимо в модель, що описується рівняннями (1), (2), та побудуємо адаптивний фільтр Калмана, що описується наведеними нижче рівняннями.

Екстраполяція:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{X}}_k + \mathbf{B}_k,$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \Phi_{k+1} \mathbf{F}_k \Phi_{k+1}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T;$$

фільтрація:

$$\widehat{\mathbf{X}}_k = \widehat{\mathbf{X}}_{k-1} + \mathbf{K}_k v_k,$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1},$$

$$\mathbf{F}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k,$$

де  $v_k = Z_k - \mathbf{H}_k \widehat{\mathbf{X}}_{k-1}$  – нев'язка фільтра,  $\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} \widehat{q}_k \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$$\mathbf{Q}_k = (\sigma_a^*)^2, \quad \mathbf{R}_k = (\sigma^*)^2.$$

Як початкове наближення матриці  $\mathbf{F}_1$  вибрано матрицю

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} (\sigma^*)^2 & \frac{(\sigma^*)^2}{T} \\ \frac{(\sigma^*)^2}{T} & \frac{2 * (\sigma^*)^2}{T^2} \end{bmatrix}.$$

При прогнозуванні як оцінку значення  $q^*$  в математичну модель, що описується рівняннями (1), (2), підставимо значення останньої розрахованої за відомими значеннями ряду оцінки  $\widehat{q}^{(45)}$ .

Також виконується побудова та прогнозування значень середньодобових цін на цинк за моделями експоненційного згладжування, авторегресійною моделлю та авторегресійною моделлю з ковзним середнім за допомогою використання програмного пакета Eviews 6. Модель експоненційного згладжування описується формулою (5). Початкове наближення обчислюється за формулою (6).

Авторегресійна модель порядку  $p$  описується формулою

$$y(k) = a(0) + \sum_{i=1}^p a(i) \cdot y(k-i),$$

де  $k = 1, \dots, N$  – моменти часу, на основі даних про значення ряду в ці моменти часу будується математична модель;  $y(k)$  – значення ряду в  $k$ -й момент часу;  $y(k-i)$  – значення ряду в  $(k-i)$ -й момент часу;  $a(0)$ ,  $a(i)$  – числові коефіцієнти авторегресійної моделі порядку  $p$ , де  $i = 1, \dots, p$  [8].

Авторегресійна модель порядку  $p$  з ковзним середнім порядку  $q$  описується формулою

$$y(k) = a(0) + \sum_{i=1}^p a(i) \cdot y(k-i) + v(k) + \sum_{j=1}^q b(j) \cdot v(k-j),$$

де  $v(k)$  – значення залишків ряду в  $k$ -й момент часу;  $v(k-j)$  – значення залишків ряду в  $(k-j)$ -й момент часу;  $b(j)$  – числові коефіцієнти, обчислені за авторегресійною моделлю порядку  $p$  з ковзним середнім порядку  $q$ , де  $j = 1, \dots, q$  [8].

Для оцінювання якостей побудованих моделей у цілому після побудови моделей за допомогою програмного пакета Eviews 6 виконано обчислення таких статистичних характеристик, як коефіцієнт детермінації  $R^2$ , сума квадратів похибок моделі ( $SSE$ ), статистика Дурбіна–Уотсона (Durbin–Watson) –  $DW$ .

Коефіцієнт детермінації  $R^2$  розраховується за формулою

$$R^2 = \frac{\text{Var}[\widehat{y}(k)]}{\text{Var}[y(k)]},$$

де  $\text{Var}[\widehat{y}(k)]$  – дисперсія основної змінної  $\widehat{y}(k)$ , оціненої за моделлю;  $\text{Var}[y(k)]$  – фактична дисперсія основної змінної  $y(k)$ , обчислена на основі вибірки [8].

Сума квадратів похибок моделей обчислюється за формулою

$$SSE = \sum_{k=1}^N [\widehat{y}(k) - y(k)]^2,$$

де  $\widehat{y}(k)$  – значення, що отримані за математичними моделями;  $y(k)$  – реальні значення;  $N$  – кількість значень у вибірці даних [8].

Статистика Дурбіна–Уотсона обчислюється за формулою

$$DW = 2 - 2 \cdot \rho, \quad (7)$$

де  $\rho$  – коефіцієнт автокореляції для  $e(k)$  і  $e(k-1)$ , тобто при зсуві  $S = 1$  [8].

У формулі (7) коефіцієнт автокореляції  $\rho$  для  $e(k)$  і  $e(k-1)$  обчислюється як

$$\rho = \frac{\sum_{k=2}^N e(k) \cdot e(k-1)}{\sum_{k=1}^N [e(k)]^2},$$

де  $e(k)$  – похибка моделі в  $k$ -й момент часу;  $e(k-1)$  – похибка моделі в  $(k-1)$ -й момент часу [8].

Також після побудови математичних моделей з використанням програмного пакета

Евіювс б обчислено значення статистичних характеристик, які дають можливість визначити якість прогнозу, а саме значення середньоквадратичної похибки *RMSE* (Root Mean Square Error), середньої відсоткової абсолютної похибки *MAPE* (Mean absolute percentage error) та коефіцієнта Тейла (Theil) *U*. Критерієм покращення придатності побудованої моделі для прогнозування є мінімізація перелічених вище статистичних характеристик.

Значення середньоквадратичної похибки *RMSE* обчислюється за такою формулою:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [y(i) - \hat{y}(i)]^2},$$

де *n* – загальна кількість днів, на які здійснювався прогноз; *y(i)* – реальні значення;  $\hat{y}(i)$  – значення, що отримані за математичними моделями; *i* = 1, ..., *n* – дні, на які здійснювався прогноз [8].

Значення середньої відсоткової абсолютної похибки *MAPE* обчислюється за формулою

$$MAPE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|y(i) - \hat{y}(i)|}{|y(i)|} \cdot 100 \%.$$

Значення коефіцієнта Тейла обчислюється за формулою

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [y(i) - \hat{y}(i)]^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [y(i)]^2 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [\hat{y}(i)]^2}}.$$

У табл. 1 і 2 наведено статистичні та прогностичні характеристики за побудованими моделями відповідно. Модель на основі фільтра Кал-

мана з використанням оцінок значень  $q^*$ , знайдених за алгоритмом № 5, позначено ФК(5). Як початкові значення для цієї моделі взято  $(\sigma_a^*)^2 = 0,004$ ,  $(\sigma^*)^2 = 0,004$ . Модель експоненційного згладжування позначено ЕЗ. Для цієї моделі як початкове наближення взято середнє значення ряду  $S(0) = 1928,405556$ , значення параметра згладжування  $\alpha = 0,9$  вибрано за сіткою значень як таке, для якого є найменшим значення середньої відсоткової абсолютної похибки *MAPE*. Побудовану авторегресійну модель порядку 3 позначено АР(13). Порядок авторегресійної моделі вибрано як значення, за якого значення часткової автокореляційної функції ряду відмінні від нуля в статистичному смислі. Як поріг значень вибрано 0,01. Побудовану авторегресійну модель порядку 3 з ковзним середнім порядку 3 позначено АРКС(3,3). При побудові цієї моделі порядок авторегресії вибрано як значення, за якого значення часткової автокореляційної функції ряду відмінні від нуля в статистичному смислі, та порядок ковзного середнього вибрано як значення, за якого значення часткової автокореляційної функції залишків ряду відмінні від нуля в статистичному смислі. При цьому в обох випадках як поріг значень вибрано 0,01.

З табл. 1 видно, що за значеннями  $R^2$  і *SSE* кращою є модель АРКС(3,3). За значенням *DW* кращою є модель ЕЗ, що свідчить про низьку кореляцію між похибками моделі. Модель ФК(5) має близьке до ідеального значення 1 значення  $R^2$  й за всіма статистичними характеристиками є кращою за модель АР(13). З табл. 2 видно, що за значеннями *RMSE*, *MAPE* і *U* кращою є модель ФК(5).

Таблиця 1. Статистичні характеристики моделей

Статистична характеристика	ФК(5)	ЕЗ	АР(13)	АРКС(3,3)
$R^2$	0,985855	0,831066	0,983834	1
<i>SSE</i>	100147,312526	78076,790744	166996,156347	2,629509
<i>DW</i>	0,484513	1,573259	0,457190	0,113770

Таблиця 2. Прогностичні характеристики моделей

Прогнозна характеристика	ФК(5)	ЕЗ	АР(13)	АРКС(3,3)
<i>RMSE</i>	40,612779	48,072378	146,302149	169,670802
<i>MAPE</i>	1,301770	1,911522	5,668825	6,693304
<i>U</i>	0,009039	0,010566	0,031531	0,036386

## Висновки

Результати виконаного імітаційного моделювання показують, що для всіх розглянутих алгоритмів значення статистичної дисперсії для математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних збігаються до нуля, що свідчить про ефективність запропонованих алгоритмів. Показано, що при фіксованому значенні  $q^*$  зі збільшенням значень  $(\sigma_a^*)^2$  і  $(\sigma^*)^2$ , а також зі збільшенням різниці між цими значеннями збіжність значень статистичної дисперсії для математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних до нуля погіршується. При незмінних значеннях  $(\sigma_a^*)^2$  і  $(\sigma^*)^2$  зі збільшенням значення  $q^*$  збіжність значень статистичної дисперсії для математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних до нуля погіршується.

За результатами імітаційного моделювання зроблено висновок, що кращими є алгоритми № 1, 5 і 6. Показано, що оцінка значення  $q^*$  за побудованими вибірковими послідовностями нев'язок не приводить до покращення результатів порівняно з оцінкою значення  $q^*$  за повною послідовністю нев'язок.

Виконано побудову математичної моделі на основі фільтра Калмана, моделей експоненційного згладжування, авторегресії, авторегресії з ковзним середнім і прогнозування за ними на основі реальних даних. За обчисленими статистичними характеристиками можна зробити висновок, що за значеннями  $R^2$  та  $SSE$  кращою є модель АРКС(3,3). За значенням  $DW$  кращою є модель ЕЗ, що свідчить про низьку кореляцію між похибками моделі. Модель ФК(5) має близьке до ідеального значення 1 значення  $R^2$  й за всіма статистичними характеристиками є кращою, ніж модель АР(13). За обчисленими прогнозними характеристиками можна зробити висновок, що за значеннями  $RMSE$ ,  $MAPE$  і  $U$  кращою є модель ФК(5).

У подальших дослідженнях планується розвиток отриманих теоретичних результатів з можливим сумісним оцінюванням значень математичного сподівання прискорення зміни значень вибірки даних, дисперсії прискорення зміни значень вибірки даних, дисперсії шуму вимірів та застосування теоретичних розробок на практиці.

1. *Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах* / Под ред. К.Т. Леондеса. – М.: Мир, 1980. – 407 с.
2. *Мехра Р.* Идентификация и адаптивная фильтрация Калмана // *Механика* [сб. переводов статей]. – 1971. – № 3. – С. 34–51.
3. *M. Oussalah and J. De Schutter*, "Adaptive Kalman Filter for Noise Identification", in Proc. Int. Conf. Noise and Vibration Eng., pp. 1225–1232, 2000.
4. *A. Almagbile et al.*, "Evaluating the Performances of Adaptive Kalman Filter Methods in GPS/INS Integration", J. Global Positioning Sys., vol.9, no.1, pp. 33–40, 2010.
5. *Згуровский М.З., Подладчиков В.Н.* Аналитические методы калмановской фильтрации для систем с априорной неопределенностью. – К.: Наук. думка, 1995. – 283 с.
6. *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
7. *Офіційний сайт Лондонської біржі металів.* Розділ "Історичні дані". – Режим доступу: [http://www.lme.com/historical\\_data.asp](http://www.lme.com/historical_data.asp)
8. *Бідюк П.І., Коршевніюк Л.О.* Проектування комп'ютерних інформаційних систем підтримки прийняття рішень: Навч. посібник. – К.: ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", 2010. – 340 с.

Рекомендована Радою  
Навчально-наукового комплексу  
Інститут прикладного системного  
аналізу НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції  
25 квітня 2013 року