УДК 512.542 + 512.543

Р.В. Скуратовський

МІНІМАЛЬНІ СИСТЕМИ ТВІРНИХ І ВЛАСТИВОСТІ ВІНЦЕВИХ ДОБУТКІВ ДОСКОНАЛИХ ГРУП

Generators and defining relations for wreath products of perfect group which is two generating and alternating groups $A_{n_1} \wr A_{n_2} \wr \ldots \wr A_{n_m}$ ($m > 2$ times) are given. System of generators of metaperfect groups are found. Generators and defining relations for wreath products of 2-generating perfect groups were found, including alternating groups, i.e. $A_{n_1} \wr A_{n_2} \wr \ldots \wr A_{n_m}$ ($m > 2$ time). Systems of generators for metaperfect groups were investigated. A constructive proof of the minimality found system of generators was presented. It is shown that metaperfect group is not locally finite group. Cases of wreath product $G \wr \mathcal{D}$ of metaperfect group $\mathcal{D}$ with group (G, X), which may be such that acts as a transitive and intransitive, construct the corresponding systems of generators. Presented generalization is the appearance of the product of different perfect groups H_i and finding the exact value $d_n^{wr}(H_i)$ instead of the estimate. As it was found, for perfect 2-generator groups, wich has conditions founded by us, satisfy the equality of lower estimate $d_n^{wr}(H_i) = d(H_i) = 2$, it was easily generalized for 3-generated groups as $d_n^{wr}(H_i) = 3$. It was found, that some of the properties immanent alternating groups are saved for metaalternating groups. The criterion of perfectly for metaalternating group was obtained. Inverse limit of metaalternating group, which is proved to be branch group that does not own the property of locally finiteness was analyzed.

Keywords: minimal system of generators, wreath product, metaperfectgroup, group.

Вступ

У статті [1] неконструктивними методами було доведено двопородженість нескінченно ітерованих вінцевих добутків $A_{n_1} \wr A_{n_2} \wr \ldots$, де $n_i \geq 5$. Пізніше [2, 3] цей результат було узагальнено на нескінченно ітеровані вінцеві добутки довільних неабелевих простих груп. В статтях [4, 5] було побудовано топологічну r-елементну та двохелементну системи твірних для метазнакозмінних груп нескінченного і скінченного рангу для $n_i \geq 7$ відповідно. Нагадаємо, що під комбінаторно-груповою функцією $d(H)$ розуміють мінімальну кількість твірних групи H.

Обмеженість значення комбінаторно-групової функції $d_n^{wr}(D)$ — мінімальної кількості твірих для вінцевого степеня кратності n досконалої транзитивної групи D, було неконструктино доведено Є.В. Бондаренком у [6] і сформульовано в наслідку 4 як $d(D) \leq \leq d_n^{wr}(D) \leq 2d(D \wr D)$. Запропоноване нами доведення є конструктивним. Як виявилось, тепер для досконалих груп досягається нижня межа значень оцінки для комбінаторно-групової функції $d_n^{wr}(D) = 2$, де D — досконала, двопороджена і транзитивна.

Зроблене узагальнення полягає в появі добутку різних досконалих груп H_i і знаходженні точного значення $d_n^{wr}(H_i)$ замість оцінки. Як виявилось, для добутку різних досконалих двопороджених груп D_i, $1 \leq i \leq j$, зі знайденими нами умовами теж виконується рівність з нижньої оцінки $d_n^{wr}(H_i) = d(H_i) = 2$, яка нескладно узагальнюється для k-породжених груп як $d_n^{wr}(H_i) = k$.

Постановка задачі

Мета роботи — побудувати мінімальну систему твірних для вінцевого добутку довільних досконалих груп; створити доведення і результати, що є простішими і набагато загальнішими, ніж результати попередників; ввести нові поняття і конструкції.

Означення і основні поняття

Нехай (G, X) і (H, Y) дві групи підстановок (усі дії тут є точними). Вінцевим добутком груп підстановок $G \wr H$ є напівпрямий добуток $H^{|X|} \rtimes G$ з природною дією на (X, Y), де G діє на $H^{|X|}$, переставляючи копії групи.

Елементам групи $G = \wr_{i=1}^{\infty} G_i$ зручно зіставляти нескінченні таблиці вигляду $u = [\sigma_1, \sigma_2(x_1),$

$\sigma_2(x_1x_2),\ldots]$, де $\sigma_1=\sigma_1(x_0)\in G_1$, $\sigma_i(x_1,\ldots,x_{i-1})\in$ $\in G^{M_1\times\ldots\times M_{i-1}}$ $(i=2,3,\ldots)$. Позначимо як $[u]_n$ n-ту координату таблиці u.

Означення метазнакозмінної групи $A(\overline{k})$ сформульоване в [4]. Узагальнимо та дослідимо це поняття.

Виявилось, що деякі властивості, іманентні знакозмінним групам, зберігаються і для метазнакозмінних.

***Означення* 1.** Група називається досконалою, якщо вона рівна своєму комутанту.

Виявилось, що ця властивість характерна і для груп, які побудовані з досконалих груп за допомогою операції вінцевого добутку.

***Означення* 2.** Метадосконалою групою $D(\overline{k})$ рангу m, метастепеня $\overline{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ називається вінцевий добуток $(D_1,X_{k_1})\wr$ $\wr(D_2,X_{k_2})\wr\ldots\wr(D_m,X_{k_m})$ досконалих груп підстановок $(D_1,X_{k_1}),\ldots,(D_m,X_{k_m})$.

Група $D(\overline{k})$ природним чином діє на прямому добутку множин $\{1,2,\ldots,k_1\},\{1,2,\ldots,k_2\},\ldots,$ $\{1,2,\ldots,k_m\}$, тому є групою підстановок степеня $k_1\cdot k_2\ldots\cdot k_m$. Її дія є транзитивною, але імпримітивною.

Теорема 1. Метазнакозмінна група метастепеня $(k_1,k_2,\ldots,k_s)$ досконала тоді і тільки тоді, коли всі $k_i\geq 5$.

Доведення. Відомо (див. [6]), що абеліанізація вінцевого добутку рівна $A_{k_1}/[A_{k_1},A_{k_1}]\times$ $\times A_{k_2}/[A_{k_2},A_{k_2}]\times\ldots\times A_{k_s}/[A_{k_s},A_{k_s}]$. Група досконала тоді і тільки тоді, коли її абеліанізація є тривіальною групою. А це буде виконуватись лише у випадку, коли всі $k_i\geq 5$.

Обґрунтування основних результатів

Позначимо

$$s_n=\begin{cases}(1,2)(3,\ldots,n),\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\\ (3,4,\ldots,n),\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2).\end{cases}$$

Відомо [7], що $t=(1,2,3)$ та s_n є системою твірних для групи A_n, $n>3$.

Лема 1. Нехай t_d і s_d — це твірні групи D. Тоді елементи (1) утворюють систему твірних для $A_n\wr D$, $n\geq 4$:

$$\begin{cases}[t,e,\ldots,e],[e,e,e,t_d,\ldots,e],\\ [s_n,e,e,\ldots,e],[e,e,e,s_d,e,\ldots,e],\end{cases}\tag{1}$$

де символом e позначено як тотожну підстановку, так і функцію від k змінних $(1\leq k\leq$ $\leq n-1)$, всі значення якої є тотожними підстановці.

Доведення. Відомо (див. [8]), що системою твірних для групи $A_n\wr D$ є наступна:

$$\begin{cases}s_0=[(3,4,\ldots,n),e,\ldots,e],\ s_1=[e,s_d,e,\ldots,e],\ldots,\\ s_i=[e,\ldots,e,s_d,e,\ldots,e],\ldots,s_n=[e,\ldots,e,s_d];\\ t_0=[(1,2,3),e,\ldots,e],\ t_1=[e,t_d,e,\ldots,e],\ldots,\\ t_i=[e,e,\ldots,e,t_d,e,\ldots,e],\ldots,t_n=[e,\ldots,e,t_d].\end{cases}\tag{2}$$

Через спряження твірних з (1) можна отримати всі елементи з (2), наприклад: $s_0t_3s_0^{-1}=$ $=[s,e,e,\ldots,e][e,e,e,t,e,\ldots,e][s^{-1},e,e,\ldots,e]=[e,e,e,e,$ $t,e,\ldots,e]=t_4$, $s_0t_is_0^{-1}=[s,e,e,\ldots,e][e,e,\ldots,e,t,e,\ldots,e]\times$ $\times[s^{-1},e,e,\ldots,e]=[e,e,e,\ldots,e,t,e,\ldots,e]=t_{i+1}$, $s_0^jt_is_0^{-j}=$ $=t_{i+j}$, $i+j\leq n$, $t_0^jt_it_0^{-j}=t_{i+j}$, $i+j\leq 3$.

Лема 2. Нехай A,D скінченні, досконалі групи, A діє на скінченній X, тоді $A\wr D$ теж досконала.

Доведення. Маємо систему твірних аналогічну до (2), де замість твірних A_n в таблицях стоять твірні групи A, зафіксуємо довільний $x\in X$ і $B_X=[e,\ldots,e,b_x,e,\ldots,e]\,|\,b\in B\}$. З одного боку, комутант $(A\wr D)'$ містить як підмножину всі елементи вигляду (2), тобто $[a,e,\ldots,e]$, $[e,\ldots,e,$ $b_x,\ldots,e]$ через досконалість груп A і B. Наприклад, $[a,e,\ldots,e]=[v,e,\ldots,e][u,e,\ldots,e][v^{-1},e,\ldots,e]\times$ $\times[u^{-1},e,\ldots,e]$ і через досконалість такі $u,v\in A$ існують. Аналогічно з твірними вигляду $[e,\ldots,e,$ $b_x,\ldots,e]$, тобто $(A\wr D)'\supseteq(A\wr D)$. Навпаки, група завжди містить свій комутант, тому $(A\wr D)'\subseteq(A\wr D)$.

***Зауваження*.** Вінцевий добуток $\wr_{i=1}^k D_i$ досконалих груп (D_i,X_i), де $|X_i|<+\infty, 1\leq i\leq k$, теж досконала група, база перевірена в лемі 2.

Доведення. За методом математичної індукції по i.

Лема 3. Нехай маємо досконалу групу $D\simeq\langle t_D,s_D\rangle$. Тоді елементи $g=[t,e,e,t_D,e,\ldots,e]$ та $f=[s_n,e,e,s_D,e,\ldots,e]$ утворюють систему твірних для $A_n\wr D$, $n\geq 4$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли n — непарне. Тоді $s_n = (3,4,\dots,n)$. Взявши степені твірних $g^3 = [e,s,s,s,e,\dots,e]$, $f^{n-2} = [e,e,e,t_D,t_D,\dots,t_D]$, породжуємо ними підгрупу $H = \langle g^3, f^{n-2}\rangle$. Зазначимо, що її третя координата містить всю множину елементів з D, тобто $[H]_3 \simeq D$, бо $D = < t_D, s_D >$. Знаходимо її комутант $K = [H,H]$. Зрозуміло, що елементи з K мають вигляд $[e,e,g',e,\dots,e]$, де g' довільний елемент з D, тобто $[K]_3 \simeq D$. Таким чином, елементи $[e,e,e,t_D,e,\dots,e]$ і $[e,e,s_D,e,\dots,e]$ з (1) містяться в K і тому можуть бути виражені з g і f. Покажемо, що із вказаних твірних можна виразити (1). Справді, помножимо твірний $g = [t,e,e,t_D,e,\dots,e]$ на елемент $\omega = [e,e,e,t_D^{-1},e,e,\dots,e] \in K$ зліва, матимемо $[t,e,e,\dots,e]$. Аналогічно отримуємо $[s,e,e,\dots,e]$. Отже, маємо всю (1).

Тепер розглянемо випадок, коли n — парне. Тоді $s_n = (1,2)(3,\dots,n)$ і $f^{n-2} = [s_n^{n-2}, e, s_D, \dots, s_D] = [e,e,s_D,\dots,s_D]$. Далі породжуємо групу $H = \langle g^3, f^{n-2}\rangle$, а потім беремо її комутант. Вийде така група: $K = \{[e,e,b,e,\dots,e] \mid b \in D\}$. Далі цілком аналогічно виражається система твірних (1). Отже, f, g — твірні.

***Наслідок* 1.** Нехай $A_{n_0} = \left\langle t, s_{n_0} \right\rangle$, D — деяка досконала двопороджена група. Тоді група $\wr_{i=0}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D$, $n_0 \ge 4$, $n_i \ge 5, k-1 \ge i \ge 1$ має двохелементну систему твірних $f_1 = [t,e,e,f,e,\dots,e], g_1 = [s_{n_0}, e, e, g, e, \dots, e]$, де f, g — твірні групи $\wr_{i=1}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D \simeq D_2$.

Доведення. За методом математичної індукції база індукції перевірена в лемі 3. Покажемо правильність припущення індукції для $k+1$ співмножників. Нехай доведено двопородженість для k множників $D_2 \simeq \wr_{i=1}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D = \langle f, g\rangle$, тоді, врахувавши асоціативність вінцевого добутку груп підстановок, маємо $\wr_{i=0}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D \simeq A_{n_0} \wr (\wr_{i=1}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D) \simeq A_{n_0} \wr D_2$. До останньої групи застосовна лема 3.

***Наслідок* 2.** Метазнакозмінна група рангу s метастепеня $(k_1,\dots,k_s)$, де всі $k_i \ge 5, i > 1$, для $i = 1$, $k_1 \ge 4$ є двопородженою.

Доведення. Випливає з леми 3.

Введемо поняття індексу таблиці u: $I(u) = = [k : u_k \ne e, u \in G \wr D]$, $G = \langle t, s\rangle$ як потужність множини її координат, де є нетривіальні елементи. Означення коректне, бо база вінцевого добутку скінченна через те, що ми розглядаємо дію групи на скінченній множині. Нехай $G = \langle t, s\rangle$ і маємо множину координат X, на якій діють групи $(\langle t\rangle, X)$, $(\langle s\rangle, X)$, маємо орбіти $\{x^{\langle t\rangle} | x \in X\} = \{\mathcal{O}(x) \mid x \in X\}$, $\{x^{\langle s\rangle} \mid x \in X\} = \{\mathcal{O}'(x) \mid x \in X\}$. Фактично орбітою $\mathcal{O}(x)$ для напіврегулярної групи $\langle t\rangle$ є цикл, що містить x у цикловому розкладі підстановки t. Позначимо $\mathfrak{Q}_x = \mathfrak{Q} = \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}'(x)$, аналогічно для $G = \langle t_1, \dots, t_k\rangle$.

Процедура. Розглянемо пару орбіт, що мають непорожній перетин, тобто $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}'(x) = \mathfrak{Q}(x) \ne \varnothing$ і $\mathcal{O}(x) \ne \mathcal{O}'(x)$, якщо при цьому $|\mathfrak{Q})(x)| = 1$, то процедуру завершено. В іншому випадку застосуємо дію спряженням елементом $h \in G$ на $\mathcal{O}(x)$, отримаємо $\mathcal{O}(x^h)$. Якщо існує такий $h \in G$ і $x \in X$, що $\mathfrak{Q}^1(x) = \mathcal{O}(x^{h_i}) \cap \mathfrak{Q}(x) \ne \varnothing$ і $|\mathfrak{Q}^1(x)| = 1$, то процедура успішно завершена. Якщо ні, то за принципом рекурсії знаходимо $\mathfrak{Q}^2(x) = \mathcal{O}(x^{h_2}) \cap \mathfrak{Q}^1(x) \ne \varnothing$ і перевіряємо умову $|\mathfrak{Q}^2(x)| = 1$ і т.д. Якщо не знайдено відповідну $(h_i)_{i=1}^{\mathrm{ord}(G)}$, то діємо спряженням одночасно елементами $h, h' \in G$ на елементи з $\mathcal{O}(x^h)$ і $\mathcal{O}'(x)$ відповідно. Умова зупинки — випробувані всі $x \in X$ і спряження всіма $h, h' \in G$ кожного з них. Якщо знайдуться такі $h, h' \in G$ і $x \in X$, $|\mathfrak{Q}^k(x)| = 1$, $1 \le k \le \mathrm{ord}(G)$, то процедура успішно завершена.

***Означення* 3**. Нехай маємо множину координат X, тоді, якщо існує двохелементна система твірних для G і координата $x \in X$ така, що існує перетин $|\mathfrak{Q}(x)| = 1$ орбіт $x^{\langle t\rangle}, x^{\langle s\rangle}$, $x \in X$, або він може бути отриманий у результаті застосування процедури, то така група G називається дводопустимою.

Властивість. Якщо G двотранзитивна, то вона є дводопустимою.

Справді, описана процедура може не завершитися успішно лише з причини наявності двох блоків імпримітивності, в одному з яких містяться всі елементи з $\mathfrak{Q}(x)$, а в іншому всі елементи з доповнення — $(\mathcal{O}(x) \cup \mathcal{O}'(x)) \setminus \mathfrak{Q}(x)$ чи далі з $\mathfrak{Q}^i(x)$, а в іншому з $(\mathcal{O}(x) \cup \cup \mathcal{O}'(x)) \setminus \mathfrak{Q}^i(x)$. Але за наявності двотранзитивності не існує блоків імпримітивності, тому має місце дводопустимість.

Комутаторна процедура. Орбітальним перетином двох орбіт з таблиць назвемо величину $|I(h^k u h^{-k}) \cap I(v)|$, зокрема, використаємо $\mathfrak{Q}_x = I(v)$, тобто $|I(h^k u h^{-k}) \cap \mathfrak{Q}|$, де $u, v \in G \wr D$. Нехай маємо множину таблиць $K = \{\mathfrak{b}_j := [e, b_1, b_2, .., b_i, ., b_n] b_i \in D$, якщо $i \in \mathfrak{Q}$, інакше $b_i = e\}$. Нехай $\mathcal{O}(x) \neq \mathfrak{Q}$, задамо зсув елементів з $\mathcal{O}(x) \supset \mathfrak{Q}$ по $\mathcal{O}(x)$ на базі таблиці елемента $\mathfrak{b} \in K$. Для цього подіємо на координати кожної $\mathfrak{b}$ спряженням підстановкою t чи s (або довільною підстанокою з h, де $h \in G \wr D = \langle g, f \rangle$, а $G = \langle t, s \rangle$, де $[h]_0$ — це довільний елемент з групи підстановок G), яка реалізує циклічний зсув по $\mathcal{O}(x)$. Нехай $\mathfrak{b}_1 = g^k = [e, b_1, b_2, ..., b_n]$, $k = \mathrm{ord}([g]_0)$, причому $b_l \neq e$, аналогічно для $\mathfrak{b}_2 = f^m = [e, b_1, b_2, ..., b_n], m = \mathrm{ord}([f]_0)$. Тому $|I(g^{-1}\mathfrak{b}_1 g) \cap I(\mathfrak{b}_2)| = |I(g^{-1}\mathfrak{b}_1 g) \cap \mathfrak{Q}| \leq |I(\mathfrak{b}_1)| - 1$. Або, коротко кажучи, якщо $I(K) = t > 1$, то подіємо спряженням на K так, щоб отримати $I(g^{-1}Kg) \cap I(K) = t - 1$. Далі знаходимо взаємний комутант $K_1 = [g^{-1}Kg, K] \ni \mathfrak{b}$, де елементи таблиці $\mathfrak{b}$: $[\mathfrak{b}]_i \in D$, якщо $i \in \{I(K_1) \cap I(K)\}$, інакше $[\mathfrak{b}]_i = e$. Зазначимо, що $I(K_1) \cap I(K) = I(K) - 1$. Зроблену процедуру спряження і як наслідок 1-зсуву по $\mathcal{O}(x)$ та взяття взаємного комутанта позначимо $\mathfrak{K}(K^g, K)$. Якщо $I(K_1) = 1$, то ціль досягнена, маємо $I(K_1) = 1$, $[\mathfrak{b}]_i \ni t_D^{-1}$. Якщо ж $I(K_1) = t > 1$, то застосуємо процедуру до K_1, тобто $\mathfrak{K}(K_1^g, K_1)$, і так $|\mathcal{O}(x)|$ разів для відповідного спрягаючого елемента $[h]_1 \in G$, щоб отримати $K_{t-1} : I(K_{t-1}) = 1$. Якщо не отримано $K_{t-1} : I(K_{t-1}) = 1$, то змінюємо елемент активної групи — $[h]_0 \in G$. Так діємо для кожного $x \in X$ (умова зупинки є у процедурі), доки не знайдено одиничний орбітальний перетин.

Лема 4. Нехай маємо досконалу групу $D = \langle t_D, s_D \rangle$. Тоді, якщо $G = \langle t_0, s_0 \rangle$ транзитивно діє на $X = \{1, 2, ..., n\}$ так, що існують орбіти $\mathcal{O}(x), \mathcal{O}'(x)$:

$$\begin{cases} (\mathrm{ord}(t_0)/|\mathcal{O}(x)|, \mathrm{ord}(t_D)) = 1, \\ (\mathrm{ord}(s_0)/|\mathcal{O}'(x)|, \mathrm{ord}(s_D)) = 1, \\ \mathfrak{Q}_x \neq \varnothing, \ \mathcal{O}(x) \neq \mathcal{O}'(x), \end{cases} \tag{3}$$

і якщо група G є дводопустимою, тоді $G \wr D$ — двопороджена.

Доведення. Справді, якщо розташувати твірні пасивної групи t_D, s_D на позиції x такій, щоб виконувалась (3), то отримаємо елементи з табличним записом g, f: $g = [t_0, e, ..., e, t_D, e, ..., e]$, $f = [s_0, e, ..., e, s_D, e, ..., e]$. Покажемо, що $G \wr D = < g, f >$. Дія на множині X задана точно і, якщо $\mathrm{ord}(t_0) < |X|$, то орбіти групи $(\langle t_0 \rangle, X)$ мають довжини, рівні довжинам циклів з розкладу підстановки t_0 у добуток незалежних циклів. Якщо ж $\mathrm{ord}(t_0) > |X|$, то $\mathrm{ord}(t_0) = \text{НСК}(|\mathcal{O}(x_1)|, ..., |\mathcal{O}(x_m)|)$. Вибираємо позицію x так, щоб $I(g^{\mathrm{ord}(t_0)}) \cap I(f^{\mathrm{ord}(s_0)}) \neq \varnothing$ і щоб була виконана умова 3 леми 4 для обох орбіт.

Розглянемо $g^k = [e, g_2, ..., g_i, ..., g_n]$, де $g_i = t_D^a$, якщо $i \in \mathcal{O}(x)$, де $a = \mathrm{ord}(t_0)/|\mathcal{O}(x)|$, і $g_i = e$ інакше, аналогічно буде з f^l, враховуючи, що $(a, \mathrm{ord}(t_D)) = 1$, маємо, що $\langle t_D^a \rangle = \langle t_D \rangle$, тобто t_D і t_D^a як твірні є взаємозамінними, аналогічно s_D^b і s_D. Зазначимо, що $I(g^k) \cap \cap I(f^l) = \mathfrak{Q}_x = \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}'(x)$. При множенні g^k на f^l елементи з баз таблиць, що представляють g^k і f^l, множаться прямо. Породимо елементами g^k і f^l на координатах з $\mathfrak{Q}$ групу D, позначимо $\mathcal{G} = \langle g^k, f^l \rangle \simeq D^o$, де $o = |\mathfrak{Q}|$. Тоді $\mathfrak{a}$ таблиця, що представляє елемент з $\mathcal{G}$:

$$[\mathfrak{a}]_i = \begin{cases} e, & i \notin \mathcal{O}(x) \cup \mathcal{O}'(x), \\ s_D, & i \notin \mathcal{O}(x), i \in \mathcal{O}'(x), \\ t_D, & i \in \mathcal{O}(x), i \notin \mathcal{O}'(x), \\ u, & i \in \mathfrak{Q}, \ u \in D, \end{cases} \tag{4}$$

тобто на координатах не з $\mathfrak{Q}$ маємо e.

Візьмемо комутант $K = [\langle g^k, f^l \rangle]$. Нехай $\mathfrak{b}$ таблиця, що представляє елемент з K, така:

$$[\mathfrak{b}]_i = \begin{cases} [t_D^s, t_D^s] = e & i \notin \mathfrak{Q},\ i \in \mathcal{O}(x), \\ [s_D^u, s_D^u] = e & i \notin \mathfrak{Q},\ i \in \mathcal{O}'(x), \\ u, & u \in D,\ i \in \mathfrak{Q}, \end{cases} \qquad (5)$$

тоді елементи з K – це таблиці вигляду $[e, b_1, b_2, ..., b_n]$, де значення b_i визначено в (5). Нехай $\mathcal{O}(x) \neq \mathfrak{Q}$, задамо зсув елементів з $\mathcal{O}(x) \supset \mathfrak{Q}$ на одну позицію по самій $\mathcal{O}(x)$ на базі таблиці елемента $\mathfrak{b} \in K$. Для цього подіємо на кожну $\mathfrak{b}$ спряженням твірним $g \in G \wr D$, яке реалізує циклічний зсув по $\mathcal{O}(x)$. Тут u – це довільний елемент з D, бо можемо його породити через досконаліcть D. Тому $|I(g^{-1}\mathfrak{b}g) \cap \cap I(\mathfrak{b})| = |I(g^{-1}\mathfrak{b}\, g) \cap \mathfrak{Q}| = |I(\mathfrak{b})| - 1$. Або, коротко кажучи, якщо $I(K) = t > 1$, то подіємо спряженням на K так, щоб отримати $I(g^{-1}Kg) \cap \cap I(K) = t - 1$. Далі знаходимо взаємний комутант $K_1 = [g^{-1}Kg, K] \ni \mathfrak{b}$, де елементи таблиці $\mathfrak{b}$: $[\mathfrak{b}]_i \in D$, якщо $i \in \{I(K_1) \cap I(K)\}$, інакше $[\mathfrak{b}]_i = e$. Зазначимо, що $I(K_1) \cap I(K) = I(K) - 1$. Як узагальнення можна застосувати спряження довільним $h \in G \wr D$, $h^{-1}Kh$ і знову застосовуємо $\mathfrak{K}(K^h, K)$. Розглянемо детальніше елементи з $g^{-1}Kg$, можливі два випадки: $[g\mathfrak{b}^k g^{-1}]_i = = g_i g_i^{-1} = e$, якщо $i \notin \mathfrak{Q}$, $b_i = [\mathfrak{b}]_i \in K$, і $[g\mathfrak{b}^k g^{-1}]_i = = t_D b_i t_D^{-1} = t_D \omega_i t_D^{-1} b_i = \varpi_i b_i$, якщо $\omega_i = [b_i, t_D^{-1}]$, $\varpi_i = [t_D, \omega_i]$, $i \in \mathfrak{Q}$. Спряження елементом g робить зсув по орбіті $\mathcal{O}(x)$ елементів $b_i = [K]_i$, перетворючи їх у $\varpi_i b_i$, а оскільки b_i – це довільний елемент з D, то можемо отримати довільний $\varpi_i b_i \in D$.

Далі вибираємо в K_{t-1} елемент $v = [e, ..., e, t_D^{-1}, e, .., e]$ такий, що на позиції $I(K_{t-1}) \cap \cap I(K)$ має $t_D^{-1} \in D$. Далі, спрягаючи його елементом g^x, переставляємо його на позицію таблиці, де стоїть t_D в g. Множимо $g^{-l}vg^l$ на g і отримуємо таблицю $[t, e, e, ..., e]$ – перший твірний з (1). Тепер аналогічно отримуємо $[e, ..., e, s_D, e, .., e]$ і $[s, e, e, ..., e]$. Умова двотранзитивності забезпечує існування підстановки $h \in G$ такої, що дає одиничний перетин для $|I(h^k K h^{-k}) \cap I(K)| = 1$, чого могло не бути у випадку існування відповідних блоків імпримітивності, а двотранзитивність якраз гарантує відсутність таких блоків. Доведення завершено.

Дослідимо можливість виконання умови 3. Її виконання означає, що при наявності у порядків $\mathrm{ord}t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \mathrm{ord}t_D = p_1^{\beta_1} \ldots p_l^{\beta_l} \times \times q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \ldots q_m^{\gamma_m}$, $l < k$ НСД: $(\mathrm{ord}t_0, \mathrm{ord}t_D) = = p_1^{\iota_1} p_2^{\iota_2}, \ldots, p_l^{\iota_l} = d \in \mathbb{N}$, $\iota_l, ..., \iota_l \geq 0$. Для виконання умови 3 треба, щоб $|O_i|$ кратний d або, більш загально, достатньо, щоб $(|O_i|, d) = d$. Це не завжди можливо, наприклад, коли $d > n$, де $n = |X|$, то орбіти довжини d не існує. Але необхідною і достатньою умовою є взаємна простота $(a, \mathrm{ord}t_D) = 1$, де a – це степінь елемента в t_D таблиці після піднесення її до степеня $k = \mathrm{ord}t_o$, тобто в $g^k = [e, t_D^a, ..., t_D^a, e, e, ..., e]$.

Покажемо, що навіть за наявності $I(\mathfrak{Q}) \neq \varnothing$ можливе невиконання $|I(h^k(u)h^{-k}) \cap I(v)| = 1$. Наприклад, якщо всі неодиничні елементи обох орбіт мають такі координати, що різниці сусідніх рівні між собою, то вони утворюють блоки імпримітивності, які одночасно рухаються по орбіті і при цьому відразу або $|I(h^k(u)h^{-k}) \cap I(v)| = 0$, або $|I(h^k(u)h^{-k}) \cap \cap I(v)| > 1$. Детально це опишемо нижче.

Прикладом двопороджених метадосконалих груп є $S_n \wr A_n$, $S_n \wr PSL(r, p)$, де p – просте, $r \in \mathbb{N}$. Справді, S_n має твірні $(1, 2)$ і $(1, ..., n)$, що задовольняють умову (3), навіть є кратнотранзитивною, а $PSL(r, p)$ та A_n є двопородженими і досконалими. Через транзитивність $PSL(2, 7) = \langle t_p,\ s_p \rangle$, де $t_p = (3, 7, 5)(4, 8, 6)$, $s_p = = (1, 2, 6)(3, 4, 8)$. Таким прикладом є $PSL(2, 7) \wr A_5$, очевидно, цикловий розклад твірних t_p, s_p задовольняє умову (3), де $PSL(2, 7)$ розглядається як група підстановок.

***Означення* 4**. Строгою двохімпримітивністю назвемо наявність двох блоків імпримітивності і відсутність більшої кількості блоків імпримітивності, тобто наявність стабілізатора множини індекса 2 і відсутність таких з більшим індексом.

Зауваження. В умові леми 4 можна замінити умову двотранзитивності, яка потрібна лише тоді, коли не існує такий спрягаючий елемент h, що виконується $|I(h^k(u)h^{-k}) \cap I(v)| = 1$, на слабкішу умову відсутності строгої двохімпримітивної дії на координатах з O_i.

Доведення випливає з того, що при наявності строгої двохімпримітивної дії на координатах з O_i можливо те, що двома блоками імпримітивності якраз є множина всіх тривіальних координат і множина усіх нетривіальних координат з елементами групи D. Тоді ці блоки або переставляються між собою, або їх координати переставляться в межах своїх блоків, що унеможливлює досягнення $|I(h^k(u)h^{-k}) \cap \cap I(v)| = 1$ при умові $I(v) > 1$, $I(u) > 1$.

Теорема 2. Нехай маємо досконалу групу $D = \wr_{i=1}^{m-1} D_i = \langle s_0, s_1 \rangle$. Нехай $G = \langle t_0, t_1 \rangle$ транзитивно діє на $X = \{1, 2, ..., n\}$ так, що існують $x \in X$ і орбіти $\mathcal{O}(x) = \{x^{\cdot\langle t_0 \rangle} | x \in X\}$, $\mathcal{O}'(x) = = \{x^{\cdot\langle t_1 \rangle} \mid x \in X\}$:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{ord}(t_i)}{|\, x^{\langle t_i \rangle} \,|}, \mathrm{ord}(s_i) \right) = 1, \ i \in \{0,1\}, \\ \mathcal{O}(x) \neq \mathcal{O}'(x), \ \mathfrak{Q}_x \neq \varnothing, \end{cases} \tag{6}$$

і якщо група G є дводопустимою, тоді $G \wr D$ — двопороджена.

Доведення. Застосуємо індукцію по кількості груп-множників. База індукції перевірена в лемі 4. Нехай правильно для $m-1$ множників, тобто $D \simeq \langle t_D, s_D \rangle = \wr_{i=1}^{m-1} D_i$. Перехід індукції до m множників, тобто до групи $G \wr_{i=1}^{m-1} D_i$, забезпечує лема 4 через асоціативність $(G \wr_{i=1}^{m-1} D_i) \wr D_i = G \wr (\wr_{i=1}^{m-1} D_i \wr D_i) = G \wr_{i=1}^{m} D_i$.

Прикладом двопороджених метадосконалих груп є $S_n \wr_{i=1}^{m-1} A_{n_i}$, $S_n \wr_{i=1}^{m-1} PSL(r, p)$, де p — просте, $r \in \mathbb{N}$. Справді, S_n має твірні $(1,2)$; $(1, ..., n)$, що задовольняють умову (3) і (6), S_n є кратнотранзитивною і $PSL(r, p)$ та A_n є двопородженими і досконалими.

Нехай $S = \{s_{i_j} = [a_i, e, ..., d_j, e, ..., e], 1 \le i \le k,$ $1 \le j \le m\}$ набір таблиць, де $a_i \in A$ — транзитивна група, $d_j \in D = \wr_{i=1}^{m-1} D_i$ — досконала група і $D_i \simeq \langle S_i \rangle$ — досконала група, $A \simeq \langle S_A \rangle$, S_A, S_D — мінімальні системи твірних відповідних груп.

***Наслідок* 3.** Якщо $D = \wr_{i=1}^{m-1} D_i$ досконала група і $G = A \wr D$, $D =< d_1, ..., d_m >$, $A =< a_1, ..., a_l >$, то в наборі існує k елементів $s_1, ..., s_k$ з S: $k = \max\{| S_A |, | S_D |\}$ і $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle = \langle [a_i, e, ..., d_j, e, ..., e] \rangle$, де є кожен з a_i та d_j і виконується умова (6) для кожного твірного.

Доведення. Для випадку $m = 3$ породимо $\mathcal{G} = \langle g_1^{n_1}, g_2^{n_2}, g_3^{n_3} \rangle$, де $n_j = \mathrm{ord}(a_j)$ $g_j = = [a_i, e, ..., d_j, e, ..., e]$ для $1 \le j \le 3$, отримаємо на координатах з $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_x = \mathcal{O}_1(x) \cap \mathcal{O}_2(x) \cap \mathcal{O}_3(x)$, де $\mathcal{O}_i(x)$ — це орбіта групи $(\langle a_j \rangle, X)$.

Для довільного $m \le k$ породимо $\mathcal{G} = \langle g_1^{n_1}, ..., g_m^{n_m} \rangle$, де $n_j = \mathrm{ord}(a_j)$, знайдемо $\mathcal{G}' = K$ і далі візьмемо лівонормований взаємний комутант $\mathcal{G}'' = K_2 = [\mathcal{G}', \langle g_1^{n_1} \rangle]$, який фактично є проекцією елементів таблиць з $\mathcal{G}' = K$ на $I(g_1)$, бо елементи таблиць на позиціях не з $I(g_1)$ після взяття такого комутанта стануть рівними e. Потім $K_3 = [\mathcal{G}'', \langle g_2^{n_2} \rangle]$ — проекція K_2 на $I(s_2)$ і т.д. Будуємо послідовність лівонормованих комутантів до $\mathcal{G}^{(m)} = K_m = [\mathcal{G}^{(m-1)}, \langle g_m^{n_m} \rangle]$, оскільки процедура взяття комутатора — це перетворення взаємнооднозначне, то на координатах з $\mathfrak{Q}$ маємо елементи з D, а на всіх інших e, тобто таблиці такого типу, як у (4). Далі для отримання одиничного орбітального перетину застосовуємо процедуру $\mathfrak{K}(K^g, K)$ і отримаємо елементи такого вигляду, як в (5), та аналогічним чином виразимо систему з k твірних. Зрозуміло, якщо $k = \max\{| S_A |, | S_D |\}$, то використати менше, ніж k твірних, бо k-породжену підгрупу породити не зможемо, а тому і всю групу не породимо.

Зауваження. Насправді за умов наслідку 3 маємо $k = \max\{| S_A |, | S_{k_1} |, ..., | S_{k_m} |\}$.

Нехай $G = A \wr D_1 \wr D_2$, причому $| S_{D_1} | = m$, $| S_{D_2} | = l$, $| S_A | = n_1$ і D_1 діє транзитивно, тоді за наслідком 3 маємо $k_1 = \max\{m, l\}$ твірних. Група $A \wr D_1 \wr D_2 = A \wr (D_1 \wr D_2)$ за наслідком 3 має $k_2 = \max\{n_1, k_1\}$ твірних. Аналогічно доводиться крок індукції по кількості груп співмножників у D з наслідку 3.

Теорема 3. Нехай маємо інтранзитивну групу $(G, X) = \langle S \rangle$, яка допускає розклад $(G, X) \simeq \simeq \prod_{i=1}^{m} (G_i, X_i)$ з розбиттям X на області транзитивності $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$ і метадосконалу групу $D \simeq \langle t_D, s_D \rangle = \wr_{i=1}^{m-1} D_i$. Тоді, якщо $(G_i, X_i) = \langle t_i, s_i \rangle$ діє на відповідному X_i транзитивно так, що існують орбіти $\mathcal{O}(x)$, $\mathcal{O}'(x)$, що задовольняє умову (6) теореми 2. Тоді група $(G, X) \wr D =< S, t_D, s_D >$, де t_D, s_D мають такий вигляд, як g, f у теоремі 2.

Доведення. Відомо, що $(G, X) \wr D \simeq \simeq \prod_{i=1}^{m}(G_i, X_i) \wr D$. З умови випливає, що $S = = \{t_0, s_0, t_1, s_1, ..., t_m, s_m\}$, а у випадку, якщо серед прямих множникиів з $\prod_{i=1}^{m}(G_i, X_i)$ є n однакових досконалих груп G_0, то $d((G_0, X_0)^n) < < d(G_0) + 1 + \log_s n$, де $s = \mathrm{ord}(H)$, а H – це найменша проста не абелева група, що є образом G_0 [15]. Для знакозмінних груп зробимо точнішу оцінку $d((A_{n_i})^{k_i}) < d(A_{n_i}) + 1 + + \frac{\log k_i}{\log|A_{n_i}|} = 3 + \frac{\log k_i}{\log|A_{n_i}|}$ або, враховуючи її простоту, $d((A_{n_i})^{k_i}) < e \log_{n_i!/2} k_i$, $e > 1, e \in \mathbb{R}$ [15]. Далі застосуємо попередню теорему 2 до кожної $(G_i, X_i) \wr D$ і індукцією по кількості прямих множників групи (G, X) та отримаємо результат.

Нехай $(D_i)_{i\geq 1}$ – послідовність довільних нетривіальних скінченних досконалих груп D_i і нехай $W = \lim\limits_{\leftarrow}(\wr_{i=1}^{\infty} D_i)$ – інверсна границя ітерованих вінцевих добутків цих груп як груп перестановок. Тоді група W гілляста, нескінченнопороджена як група континуальної потужності і не є локальноскінченною. Група W є нескінченно породженою як група континуальної потужності.

***Властивість* 1**. Група $W = \lim\limits_{\leftarrow}(\wr_{i=1}^{\infty} D_i)$ не є локально скінченною, причому тут допускається $|D_i| = +\infty$. Для доведення наведемо приклад однопородженої підгрупи $\mathcal{A} = \langle a \rangle$ метадосконалої групи $\wr_0^{\infty} A_5$ нескінченного порядку, проаналізуємо її твірний. Розглянемо елемент a, що має структуру і властивості породжуючого з додавальної машини [8, 10], запишемо його у вигляді елементів, заданих вінцевою рекурсією: $a = (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, a)(1, 2, 3, 4, 5)$. Оскільки це конструкція додавальної машини, то відомо, що a має нескінченний порядок. Отже, W не є локально скінченною.

***Властивість* 2**. Група W є майже нескінченною групою.

Нескінченно ітерований вінцевий добуток можна подати як напівпрямий добуток через його розщеплення $W_n \ltimes (D_{n+1} \wr D_{n+2} \ldots)^{x_n}$. Оскільки D_j, $1 \leq j \leq n$, множники з $W_n = = D_1 \wr D_2 \wr \ldots \wr D_n$ є скінченними, то і W_n скінченна. А пасивна група у цьому добутку – $(D_{n+1} \wr D_{n+2} \ldots)^{x_n}$ – рівна групі $H_n = = L_n^{(1)} \times L_n^{(2)} \times ... \times L_n^{(k_1 k_2 ... k_n)}$ і має скінченний індекс, бо $|W_n| < +\infty$. Отже, вся W (і навіть W_k, $k > n$) є алгебрично-гіллястою [17, 18], де $L_n^{(i)} \simeq L_n$, $x_n = k_1 k_2 ... k_n$. Отже, W задовольняє умови теореми 5.2 про майже нескінченність гіллястої групи з [18], бо абеліанізація H_n – це $H_n^{ab} = E$ через досконалість H_n і, як показано вище, $[W : H_n] < +\infty$ і $H_n = H'_n$ випливає з досконалості H_n.

Покажемо детально ще іншим способом, що W є майже нескінченною [6] групою. Виберемо $g \in W$, $g \neq e$, і покажемо, що його нормальне замикання g^W має скінченний індекс. Оскільки $g \neq e$, то існує достатньо велике i: таке, що g можна виразити через напівпрямий добуток $(\ldots \wr D_{i+2} \wr D_{i+1})^{x_i} \rtimes W_i$, де $W_i = D_i \wr D_{i-1} \wr ... \wr D_1$, тобто у вигляді $g = (g_{x_1}, g_{x_2}, \ldots, g_{x_i})\pi$, $\pi \in W_i$, і, не зменшуючи загальності, покладемо $\pi(i) = j$, $j \leq x_i$. Візьмемо довільний елемент $a \in W$, $a \neq e$, який має першу нетривіальну підстановку на i+1-му рівні, тобто елемент глибини i+1, причому ця підстановка на i+1-му рівні єдина нетривіальна, тому, якщо цю конструкцію ітерувати таким чином далі, то отримаємо конструкцію, дещо подібну до одометра, яка точно має нескінченний порядок, тобто породжує підгрупу скінченного індексу. Покажемо скінченність індексу нормального замикання g^W. Застосуємо до g спряження елементом $(a, \varepsilon, ..., \varepsilon)$ і множення на g^{-1}, добуток належить нормальному замиканню за його означенням, таким чином, взяли комутатор $(a, \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon)\pi(g_{(1)}, g_{(2)}, \ldots, g_{(x_i)}) \times (a^{-1}, \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon) \times$

$\times\pi^{-1}(g^{-1}_{\pi^{-1}(1)}, g^{-1}_{\pi^{-1}(2)}, \ldots, g^{-1}_{\pi^{-1}(x_i)}) = (a, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, g_j a^{-1} g_j^{-1}, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) \in g^W$.

Щоб отримати елемент потрібного вигляду з g^W, візьмемо ще раз комутатор з $(b, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$:

$$(a, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, ga^{-1}g^{-1}, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)(b, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)\times$$
$$\times(a, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, gag^{-1}, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)(b^{-1}, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) =$$
$$= ([a, b], \varepsilon, \ldots, \varepsilon) \in g^W,$$

де a, b — довільні елементи з $\ldots \wr D_{i+2} \wr D_{i+1}$. Отримали елемент нескінченного порядку (типу одометра), що належить до g^W — це спрощує доведення скінченності індекса. Згідно з лемою 2 $\ldots \wr D_{i+2} \wr D_{i+1}$ — досконала, бо G_j — досконалі і a, b — довільні. Через транзитивність дії W_i можемо поставити отриманий комутатор $[a, b]$ на довільну позицію, тому нормальне замикання g містить усю (базу) підгрупу $(\ldots \wr G_{i+2} \wr G_{i+1})^{x_i}$, яка є нормальною і скінченного індексу. Зауважимо, що елементи з $\ldots \wr G_{i+2} \wr G_{i+1}$ координати більших за $i+1$ після спряження $(a, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, ga^{-1}g^{-1}, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$ $(b, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)(a, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, gag^{-1}, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$ вже не скорочуються через підкрутку елементом $(b, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$.

Дослідимо, коли можливо $|I(h^k u h^{-k}) \cap \cap \mathfrak{Q}| = 1$. Для досягненя цього розглянемо узагальнену процедуру $\mathfrak{K}(K^h, K)$, де $[h]_1 = \sigma_1$ — це довільний елемент з G, що стоїть на першій координаті таблиці і який можна породити, перемножуючи таблиці. Подіємо спряженням на g^k: $h^{s_1} g^k h^{-s_1} = \hbar_s$. Нехай σ_1, σ_2 — підстановки з коренів автоморфізмів h^{s_1} і φ^{s_2}. Переконаємось, що комутатор після $h^{s_1} g^k h^{-s_1}$ знову має таку ж структуру, як і комутатори в (4). Можливі два випадки: $[h \mathfrak{b}^k h^{-1}]_i = g_i g_i^{-1} = e$, якщо $i \notin O_i$, $b_i = [\mathfrak{b}]_i \in K$ і $[h \mathfrak{b}^k h^{-1}]_i = h_i b_i h_i^{-1} = = h_i \omega_i h_i^{-1} b_i = \varpi_i b_i$, $\omega_i = [b_i, t_D^{-1}]$, $\varpi_i = [t_D, \omega_i]$, якщо $i \in O_i'$. Оскільки b_i довільний з D, то $[h \mathfrak{b}^k h^{-1}]_i$ теж.

Очевидно, структура елементів з $K = = [\langle h^{s_1} g^k h^{-s_1}, f^l \rangle]$ така ж сама, як і в (4). Нехай індекс таблиці, яка представляє h^{s_1}, такий: $I(h^{s_1}) = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, аналогічно для $\varphi^{s_2} f \varphi^{-s_2} = = \varphi_{s_2}$, $I(\varphi^{s_2}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$. Зазначимо, що $I(h^{s_1}) = \{\sigma_1^{s_1(\bmod l_1)}(i_1), \sigma_1^{s_1(\bmod l_2)}(i_2), \ldots, \sigma_1^{s_1(\bmod l_m)}(i_m)\}$ і $I(\varphi^{s_2}) = \{\sigma_2^{s_2(\bmod l_1)}(j_1), \ldots, \sigma_2^{s_2(\bmod l_q)}(j_q)\}$. Крім того, неодиничні елементи можна переставляти, спрягаючи елементом $h \in (G, X) \wr D$, бо ми можемо породити h з довільним $\sigma \in G$ твірними g, f. Потрібно, щоб знайшлось таке $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, що $|I(\hbar_{s_1}) \cap \cap I(\phi_{s_2})| = 1$. Нехай для спрощення $\sigma_2 = e$. Якщо в орбіту кожного i_p, $1 \le p \le m$, потрапляє не більше одного j_l і довжини циклів $l_1, l_2, \ldots, l_k$ попарно взаємно прості, то за Китайською теоремою про залишки завжди маємо розв'язок $\sigma_1^{s_1(\bmod l_1)}(i_1) = j_1, \sigma_1^{s_1(\bmod l_1)}(i_2) \ne j_2$, $\ldots, \sigma_1^{s_1(\bmod l_1)}(i_m) \ne j_m$. Отже, можна забезпечити одиничний перетин. Зокрема, $|I(\hbar_{s_1}) \cap \cap I(f^l)| = 1$ неможливо, коли, наприклад, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ і $i_1 \equiv j_1 (\bmod l_1)$, $i_2 \equiv j_2 (\bmod l_1)$ чи $i_2 \equiv j_1 (\bmod l_1)$, $i_1 \equiv j_2 (\bmod l_1)$. Більш загально, якщо в орбіту кожного i_p, $1 \le p \le m$, потрапляє більше одного j_l, то одним із варіантів потрібної перестановки є система

$$\begin{cases} \sigma_1^{s_2(\bmod l_1)}(i_1) = j_1, \\ \sigma_1^{s_2(\bmod l_2)}(i_2) \ne j_2, \ldots, \sigma_1^{s_2(\bmod l_2)}(i_2) \ne j_q, \\ \quad \ldots, \\ \sigma_1^{s_2(\bmod l_m)}(i_m) \ne j_2, \ldots, \sigma_1^{s_2(\bmod l_m)}(i_m) \ne j_q. \end{cases} \qquad (8)$$

Якщо спряження застосувати і до індексів з $I(f^l)$, тобто зробити $h^r f^l h^{-r} = \varphi_r$, то іншим розташуванням нетривіальних елентів можна досягти інший орбітальний перетин. Цілком зрозуміло, що якщо група (G, X) двотранзитивна, то в процедуру $\mathfrak{K}(X)$ з дією спряження дасть потрібне розташування твірних. Нехай орбіта другої підстановки: $I(\varphi^{s_2}) = \{j_{q_1}, j_{q_2}, \ldots, j_{q_t}\}$. Для кожного рівняння з (8) визначимо степінь m_y, $y \in T : \sigma^{m_y}(i_{p_y}) = j_{q_y} \in I(f^l)$, тобто степінь, при якому позиція неодиничного елемента збігатиметься з відповідним j_{q_y}. Тоді умова спрощується:

$$\begin{cases} s \equiv m_1(\mathrm{mod} l_{p_1}), \\ s \equiv m_2(\mathrm{mod} l_{p_2}),\ m_2 \notin T, \\ \quad , \ . \ . \ . \ , \\ s \equiv m_t(\mathrm{mod} l_{p_t}),\ m_t \notin T. \end{cases}$$

Якщо ж остання система розв'язку не має, то потрібно вимагати умову двотранзитивності і, застосувавши $h^{s_1} g^k h^{-s_1}$ так, щоб зробити $|\, I(\hbar_s) \cap I(f^l) \,|$ меншим, далі застосувати $\mathfrak{K}(X)$ до $\hbar_s$ і f^l.

Висновки

Отже, для випадку послідовності двопороджених досконалих груп $(D_i)_{i \ge 1}$ доведено двопородженість метадосконалої групи. Зроблено коротке доведення двопородженості метазнакозмінної групи. Досліджено мінімальності. Доведено майже нескінченність метадосконалої групи.

У подальшому можна дослідити систему співвідношень цих груп.

Список літератури

1. *M. Bhattacharjee*, "The probability of generating certain profinite groups by two elements", Israel J. Math., no. 86, pp. 311–329, 1994.
2. *M. Quick*, "Probabilistic generation of wreath products of non-Abelian finite simple groups", Commun. Algebra, no. 32 (12), pp. 4753–4768, 2004.
3. *M. Quick,* "Probabilistic generation of wreath products of non-Abelian finite simple groups. II", Int. J. Algebra Comput., no. 16(3), pp. 493–503, 2006.
4. *Заводя М.В., Сікора В.С., Сущанський В.І.* Двухелементні системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу // Мат. студії. – 2010. – **34**, № 1. – С. 3–12.
5. *Олійник Б.В., Сікора В.С., Сущанський В.І.* Метасимметрические и метазнакопеременные группы бесконечного ранга // Мат. студії. – 2008. – **29**, № 2. – С. 139–150.
6. *I.V. Bondarenko*, "Finite generation of iterated wreath products", Archiv der Mathematik, vol. 95, is. 4, pp. 301–308, 2010.
7. *R.D. Karmichael*, "Abstract definitions of the symmetric and alternating groups and certain other permutation groups", Quart. J. Math., vol. 49, pp. 226–270, 1923.
8. *Сікора В.С., Сущанський В.І.* Операції на групах підстановок. – Чернівці: Рута, 2003. – 256 с.
9. *Сущанский В.И.* Нормальное строение группы изометрий метрического пространства целых *p*-адических чисел. Алгебраические структуры и их применение. – К.: КГУ, 1988 – С. 113–121.
10. *R. Grigorchuk, I. Pak*, Groups of Intermediate Growth: an Introduction for Beginners. Preprint [Online]: http://arxiv.org/pdf/math/0607384.pdf
11. *W.M. Kantor*, "Some Cayley graphs for simple groups", Discrete Applies Mathematics, vol. 25, pp. 99–104, 1989.
12. *H. Wielandt*, Finite permutations Groups. New York–London: Academic Press, 1968. – 108 p.
13. *D. Segal*, "The finite images of finitely generated groups", Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser., vol. 82(3), pp. 597–613, 2001.
14. *J. Wiegold*, "Growth sequences of finite groups 3", J. Austral. Math. Soc., vol. 25, pp. 142–144, 1978.
15. *Калужнин Л.А.* Об одном обобщении силовских *p*-подгрупп симметрических групп // Acta Math. Hung. – 1951. – **2**, № 3-4. – P. 198–221.
16. *R. Grigorchuk, Z. Sunic,* "Self-similarity and branching in group theory", Math. Res. Notices, p. 54, 1998.
17. *L. Bartholdi et al.,* "Branch groups", in Handbook of algebra, vol. 3. Amsterdam: North-Holland, 2003, pp. 25–118.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
3 квітня 2014 року